PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6. 15. März 1918. Redaktionsschluß für No. 8 am 20. März 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:
P. Selényi, Spiegelung an Flächen mit negativer Krümmung. S. 105.
V. F. Hess u. W. Schmidt, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre. S. 109.
A. Gockel, Über die Ursache der Zunahme der Ionisation der Atmosphäre mit der Höhe. S. 114.
A. Einstein, Notiz zu E. Schrödingers Arbeit „Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes". S. 115.
Zusammenfassende Bearbeitungen:
L. Flamm, Zum gegenwärtigen Stand der Quantentheorie. S. 116.
Besprechungen:
V. Kohlschütter, Die Erscheinungsformen der Materie. Vorlesungen über Kolloidchemie. S. 128.
F. Auerbach, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Einführung in die Physik. S. 128.
W. Deutsch, Metallphysik. S. 128.
Personalien. S. 128.
Gesuche. S. 128.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Spiegelung an Flächen mit negativer Krümmung.

Von Paul Selényi.

1. Eine zufällige Beobachtung des eigenen Spiegelbildes in einem metallenen, blank polierten Serviettenring von der Form der Fig. 1

Fig. 1.

gab die Veranlassung, mich mit dem oben genannten Gegenstand etwas näher zu beschäftigen. Insofern es ohne Nachforschung der Literatur sich behaupten läßt, findet man nirgends Erwähnung der recht interessanten Eigenschaften eines Spiegels mit negativem Gaußschen Krümmungsmaße $\left(\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}\right)$. Die auffälligste von diesen Eigenschaften sei sofort vorausgeschickt: Die Bilder sind im allgemeinen nicht spiegelsymmetrisch zum Gegenstand, wie die vom ebenen oder Kugel-Spiegel, sondern im Sinne der Analysis situs ähnlich bzw. auch den Dimensionen nach also im gewöhnlichen geometrischen Sinne ähnlich: die rechte Hand bleibt also auch im Spiegelbilde die rechte, das Bild einer Schrift ist keine Spiegelschrift, sondern eine gewöhnliche, lesbare Schrift usw.

Eine beiläufige, populäre Erklärung dieser Eigenschaft ist ganz naheliegend. Vorausgesetzt, — und diese Voraussetzung soll im folgenden auch beibehalten werden — daß die Ebene der konvexen Krümmung vertikal, die der konkaven horizontal liegt, so liefert die erstere ein aufrechtes Bild, mit dem Kopfe nach oben; die letztere aber ein verkehrtes Bild, die linke Hand rechts zeigend und umgekehrt; wodurch eben die in den gewöhnlichen Spiegeln stattfindende „Vertauschung" der rechten und linken Hand paralysiert ist.

Schon der Umstand aber, daß das von der konvexen Krümmung gelieferte Bild virtuell, das von der konkaven erzeugte aber reell ist, zeigt die Kompliziertheit des eigentlichen Sachverhaltes und rechtfertigt ein näheres Eingehen in diesen; um so mehr, als dadurch auch ein tieferer Einblick in die Natur der astigmatischen Abbildung gewonnen werden kann.

2. Für die weiteren Betrachtungen soll uns ein kleines, viereckiges Spiegelstück dienen, begrenzt durch benachbarte Krümmungslinien, wie Fig. 2 es zeigt, und als Gegenstand nehmen

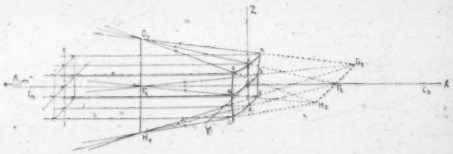


Fig. 2.

wir einen unendlich weit entfernten, auf der Hauptnormale des Spiegels liegenden leuchtenden Punkt an. Das einfallende parallele Strahlenbündel wird durch die Reflexion in die Gesamtheit der windschiefen Geraden umgewandelt (Fig. 2), welche jeden Punkt der reellen Fokallinie G_1H_1 mit jedem der virtuellen Fokallinie G_2H_2 verbinden. Von einer Abbildung durch den Spiegel allein kann also keine Rede sein (noch weniger, als durch einen zylindri-

schen Spiegel oder eine Linse). Durch die Gegenwart des leuchtenden Punktes werden in der reellen bzw. virtuellen Fokalebene gewisse Intensitätsverteilungen (vertikale bzw. horizontale Linien) hervorgebracht; allein schon die Dimensionen — und im allgemeinen auch die Form — von diesen sind lediglich durch die Form und Größe des Spiegels bestimmt. Eine Abbildung kommt erst durch Hinzunahme des Auges bzw. eines abbildenden Systems zustande. Um das gesehene Bild des leuchtenden Punktes zu bestimmen, muß man bedenken, daß die eben erwähnten Fokallinien keine selbstleuchtenden Objekte sind, welche Lichtstrahlen nach allen Richtungen aussenden, sondern daß aus jedem Punkte von G_1H_1 nur ein durch den betreffenden Punkt und durch G_2H_2 gelegtes ebenes Strahlenbündel herausgeht und vice versa. Akkommodiert also das Auge auf die reelle Fokallinie (Fig. 3), so wird als Bild des leuchtenden Punktes das Linienstück $a\,b$ auf die Retina abgebildet, welches Stück durch den Sehwinkel der Pupille — aus F_2 gesehen — begrenzt ist, wie es Fig. 3

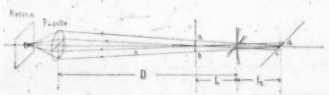


Fig. 3.

zeigt. Das auf G_2H_2 akkommodierende Auge sieht dagegen das horizontale Linienstück $\overline{c\,d}$, und eigentlich mit ebensoviel Recht kann man irgendeinen vertikalen Schnitt des Tetraeders $a\,b\,c\,d$ als Bild des leuchtenden Punktes betrachten. Für die Größe dieser zwei „Hauptbilder" gilt, daß

$$\overline{a\,b} = p \cdot \frac{f_1 + f_2}{D + f_2}, \quad \overline{c\,d} = p \cdot \frac{f_1 + f_2}{D - f_1} \text{ ist,}$$

wobei p den Pupillendurchmesser, D den Augenabstand vom Spiegel bedeutet. Für einen durch den Institutsmechaniker verfertigten Spiegel, wo $\varrho_1 = \varrho_2 = 2f = 21$ mm beträgt (Fig. 4), findet man bei 30 cm Augendistanz $\overline{a\,b}$ oder $\overline{c\,d}$ gleich etwa $^1/_5$ mm. Dementsprechend ist der Astigmatismus mit bloßem Auge kaum zu konstatieren; umso leichter aber mit einem photographischen Objektiv von großer Öffnung.

3. Begnügt man sich mit der Annäherung, wo die Pupille als punktförmig angenommen wird, so ist es leicht, die allgemeine Regel anzugeben, wie das Bild eines beliebigen Gegenstandes zu finden ist. Man sucht für jeden Punkt des Gegenstandes den entsprechenden Hauptstrahl auf und konstruiert die zugehörenden

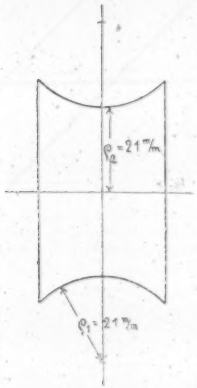


Fig. 4.

zwei Lichtlinien, welche zusammen gewisse lichterfüllte Flächen in den zwei Fokalebenen ergeben. Da zu der Bilderzeugung im Auge nur solche Strahlen beitragen können, welche durch die Pupille und zugleich durch je einen Punkt dieser Lichtfläche gehen, so ist das Retinabild identisch mit dem Teile dieser zwei Lichtflächen, welcher aus dem Pupillenpunkt betrachtet, gemeinsam, sich gegenseitig deckend erscheint.

Als erstes Beispiel betrachten wir das Bild eines vertikalen, unendlich entfernten Geradenstückes $A_\infty B_\infty$ (Fig. 5) von der Winkelgröße α. Da die Verbindungslinie eines beliebigen Punk-

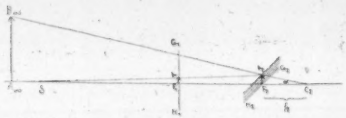


Fig. 5.

tes von $\overline{A_\infty B_\infty}$ mit dem Zentrum der konvexen Krümmung C_2 zugleich der Hauptstrahl ist für diesen Punkt, so erhält man die zwei oben erwähnten Lichtflächen, wenn man den Strahl $A_\infty C_2$ mit den mit ihm fest verbundenen Linien G_1H_1 und G_2H_2 in der vertikalen Ebene nach oben um den Winkel α dreht. Bei dieser Drehung verschiebt sich G_1H_1 in sich selbst, während G_2H_2 ein Lichtband von der vertikalen Breite gleich $f_2 \cdot \alpha$ in der gleichen Richtung mit der Drehung durchstreift. Projiziert man jetzt — nach der oben angegebenen Regel — aus dem Augenpunkt S die zwei Lichtflächen

aufeinander, so erhält man $\overrightarrow{F_1b_1}$ oder $\overrightarrow{F_2b_2}$ als Bild von A_xB_x. Welches man von den beiden als „eigentliches" Bild betrachten will, ist gleichgültig; man wäre geneigt das reelle zu nehmen; die Größe des Bildes, welche gleich $f_2 \cdot \alpha$ ist, ist aber durch den virtuellen Fokalabstand gegeben[1]). Das Bild ist dabei, wie zu erwarten, ein aufrechtes.

Für das zweite Beispiel nehmen wir dasselbe $\overrightarrow{A_xB_x}$ Geradenstück in horizontaler Lage an (Fig. 6). Die Hauptstrahlen gehen jetzt — wie man sich davon durch die Betrachtung der

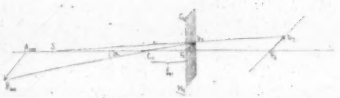


Fig. 6.

Fig. 2 leicht überzeugt — alle durch C_1, durch den Mittelpunkt der konkaven Krümmung. Konstruiert man zu jedem Hauptstrahl die entsprechenden zwei Lichtlinien, so erhält man in der virtualen Fokalebene die Linie G_2H_2 selbst, in den reellen dagegen ein Lichtband mit der horizontalen Breite gleich $f_1\alpha$. Aus dem Augenpunkt S betrachtet erscheint also als Bild von A_xB_x der Pfeil $\overrightarrow{F_1b_1}$ oder $\overrightarrow{F_2b_2}$. Wäre man hier wieder geneigt, den letzteren zu wählen, also das Bild als virtuell zu betrachten, so muß dazu bemerkt werden, daß dieses Bild die scheinbare Größe eines im reellen Brennpunkt vorhandenen Bildes von der Größe $f_1\alpha$ hat und — unabhängig von der getroffenen Wahl — eine verkehrte Lage hat.

Aus den bisherigen Resultaten folgt u. a., daß auch in dem Falle, wo $f_1 = f_2$ gemacht wird, das Bild eines (unendlich entfernten) Kreises im allgemeinen eine Ellipse ist; diese wird erst dann in einen Kreis übergehen, wenn der Abstand Auge—Spiegel im Verhältnis zur Fokaldistanz groß gewählt ist.

4. Wichtiger ist die folgende Bemerkung: Bewegt sich der leuchtende Punkt entlang eines Kreises in bestimmtem Sinne, so beschreibt der Bildpunkt den Kreis in entgegengesetztem Sinne. Aus dem Vergleich von Fig. 5 und 6 folgt nämlich, daß das Parallelogramm $ABCDA$ (Fig. 7) in das im entgegengesetzten Sinne beschriebene Parallelogramm $abcda$ abgebildet

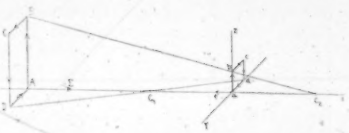


Fig. 7.

wird und diese Folgerung bleibt natürlich für jeden geschlossenen Linienzug auch gültig.

Von einer Richtung der Flächennormale wurde bisher absichtlich nichts erwähnt, um einen Fehler hervorzuheben, welchem man bei der Betrachtung des Verhältnisses Bild—Gegenstand öfters begegnet. Solange nämlich die Richtung der positiven Normale nicht festgesetzt ist, also der Gegenstand zweidimensional angenommen wird — wie es eben in der geometrischen Optik üblich ist — solange läßt es sich nicht entscheiden, ja hat sogar die Frage keinen Sinn, ob das Bild kongruent zu dem Gegenstand oder symmetrisch dazu ist. Im Falle der gewöhnlichen Spiegel lassen sich Eckpunkte und Pfeilrichtungen von Fig. 8

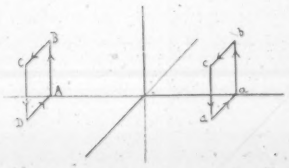


Fig. 8.

durch einfache Parallelverschiebung zu gegenseitiger Deckung bringen; hier muß dem Bilde zuerst eine Drehung von 180° um eine vertikale Achse erteilt werden. Bei den gewöhnlichen Spiegelbildern (man denke die Fig. 8 durch die Flächennormale des Parallelogramms ergänzt) weisen aber nach dieser Operation die Normalen des Gegenstandes und des Bildes nach entgegengesetzter Richtung; hier dagegen, wo die Normale $\overrightarrow{AE}$ (Fig. 7) in die Normale $\overrightarrow{ae}$ abgebildet wird, stimmen auch die Normalrichtungen miteinander überein. Unser Spiegel bildet also ein (unendlich weit liegendes) rechtsgängiges Koordinatensystem in ein rechtsgängiges ab; die gewöhnlichen Spiegel verwandeln es dagegen in ein linksgängiges und umgekehrt.

5. Um den Fall eines nicht im Unendlichen liegenden Gegenstandes zu erledigen, genügt die Bemerkung, daß — laut des bisher Gesagten — die vertikalen Linien immer wie

[1]) Für die Wahl des virtuellen Bildes spricht auch der Umstand, daß bei der Lichtverteilung in der reellen Brennebene eigentlich gar nicht zu konstatieren ist, daß der Gegenstand jetzt nicht ein Punkt, sondern eine Gerade ist, denn sie ist geblieben, wie sie früher war.

an einem konvexen Kugelspiegel, die horizontalen wie an einem konkaven Spiegel abgebildet werden. Es läßt sich also leicht die Änderung des (im allgemeinen stark verzeichneten) Bildes mit dem Objektabstande weiter verfolgen; überschreitet das Objekt während seiner Annäherung zum Spiegel den reellen Brennpunkt, so hören alle die sonderbaren Eigenschaften des Bildes auf: Es ist dann ein noch immerhin astigmatisches, aber aufrechtes und gewöhnlich-spiegelsymmetrisches Bild.

Der Vollständigkeit halber kann man auch nach der Gestaltung der Bilder von imaginären (hinter dem Spiegel liegenden) Objekten fragen; es stellt sich dann heraus, daß die Bilder eines Spiegels mit negativer Krümmung **spiegelsymmetrisch** sind, solange der Gegenstand **zwischen** den reellen und virtuellen Brennpunkten liegt; liegt er außerhalb dieser Strecke, so ist das Bild gleichsinnig mit dem Objekte.

Endlich soll noch die Bemerkung hier Platz finden, daß auch Spiegel mit positiver Krümmung gleichsinnige Bilder liefern können, aber nur dann, wenn die zwei Hauptkrümmungsradien ungleich sind. Liegt bei solchen Spiegeln der Gegenstand zwischen den zwei Hauptbrennpunkten, so ist das Bild gleichsinnig, liegt er außerhalb derselben, so ist es spiegelsymmetrisch[1]).

6. Die noch zu erübrigenden Betrachtungen sollen an die Beobachtungen geknüpft werden, die mit dem oben erwähnten Spiegel gemacht wurden. Dieser wurde aus Eisen gedreht, poliert und vernickelt; er hat einen tadellosen Hochglanz, aber längs herumlaufende feine Ritze stören manchmal merklich die Bilder. — Zuerst soll da bemerkt werden, daß von den Bildern nur das um die Hauptnormale liegende Stück ein getreues ist; nach dem Rande hin des Spiegels, wo der konvexe Krümmungradius schnell zunimmt, werden sie immer stärker verzerrt.

Die Gleichsinnigkeit von Bild und Gegenstand beobachtet man am einfachsten am eigenen Spiegelbilde. Beim ersten Anblick ist es recht überraschend, daß wenn man z. B. die eine Hand bewegt, am Bilde nicht die gegenüberliegende, sondern die quer gegenüberliegende Hand die Bewegung nachmacht. Nicht weniger überraschend ist es — auch für den Laien —, daß man eine Schrift im Spiegel richtig lesen kann; man nimmt zu diesem Versuch möglichst große Buchstaben (z. B. Titel eines Journals). — Trotzdem daß das eigene Spiegelbild recht plastisch ist, versucht man es vergeblich — obwohl dies einem etwas geübten Auge nicht schwer fällt — festzustellen, ob das Bild reell oder virtuell ist, ob es also vor oder hinter dem Spiegel liegt. In Wirklichkeit hat eben diese Frage hier keinen Sinn, wenigstens nicht in dieser Form. Ist man aber darüber noch nicht im klären, so versucht man die Frage experimentell zu erledigen. Es existiert ein sehr einfaches experimentelles Kriterium, um reelle Bilder (des eigenen Gesichtes) von virtuellen unterscheiden zu können. Man nehme einen konkaven Kugelspiegel[1]), und nähere — das eine Auge schließend — einen Stecknadelkopf dem Pupillenbild des anderen Auges, so sieht man das Bild des Stecknadelkopfes sich ständig vergrößern, bis es das ganze Gesichtsbild bzw. den ganzen Spiegel verdeckt; ist aber das Gesichtsbild virtuell (geliefert von einem konvexen Spiegel), so existiert auch kein reelles Pupillenbild (welches hier die Rolle der Austrittspupille vertritt für das System Spiegel—Auge[2])) und der Stecknadelkopf verdeckt vom Gesichtsbild immer nur ein Stück von der eigenen Größe. Wiederholt man denselben Versuch mit unserem Spiegel, so zieht sich das Stecknadelkopfbild bei der Annäherung zum Pupillenbilde nur in horizontaler Richtung auseinander und verdeckt einen solchen schmalen Streifen: Ein Beweis dafür, daß das Bild nur in dem konkaven Schnitt des Spiegels sich als reell verhält. — Dasselbe zeigt folgender einfache Versuch. Man bringt eine horizontale Millimeterskala in den konkaven Krümmungsmitttelpunkt so an, daß das gleich große[3]) Skalabild knapp darüber erscheint, so bleibt dieses relativ zur Skala unbeweglich bei einer horizontalen Bewegung des Auges — wie das ein reelles, mit der Skala in derselben Ebene liegendes reelles Bild tut —; bewegt man das Auge vertikal auf und ab, so verschiebt es sich, wie ein hinter dem Spiegel liegendes virtuelles Bild.

Ein eigentümliches Verhalten zeigen die von unserem Spiegel gelieferten Bilder bei einer Drehung des Gegenstandes bzw. des Spiegels selbst.

1) Das einfachste Beispiel eines gleichsinnig abbildenden Spiegels mit positiver Krümmung ist der zylindrische Konkavspiegel, welcher — solange der Gegenstand zwischen dem reellen und dem (im Unendlichen liegenden) virtuellen Brennpunkt liegt — ein mit dem Objekte gleichsinniges Bild liefert.

1) Ein gewöhnliches, auf der Rückseite mit schwarzem Papier beklebtes Uhrglas entspricht vollkommen diesem Zwecke.

2) Es kann daher dieser Versuch auch für die Erklärung der Eintritts- und Austrittspupille gut verwendet werden.

3) Gleichgroß, d. h. die Teilungen sind am Bilde auch ein Millimeter groß, die Teilstriche sind aber kürzer, wie die von der Skala.

Zuerst folgt aus dem früher Gesagten — und das wird durch die Beobachtung auch bestätigt, daß wenn man den Gegenstand um die Verbindungslinie Auge—Spiegel herumdreht, so dreht sich das Bild mit **gleich großer** Geschwindigkeit, aber in **entgegengesetzter** Richtung.

Dreht man dagegen den Spiegel um die erwähnte Achse herum, so dreht sich das Bild im **gleichen** Sinne, aber mit **doppelter** Geschwindigkeit. Um dieses Verhalten zu erklären, denke man die Verdrehung des Spiegels um den Winkel $+\alpha$ so ausgeführt, daß zuerst Spiegel und Gegenstand zusammen gleichzeitig um $+\alpha$ gedreht werden und der Gegenstand dann mit einer Drehung von $-\alpha$ in die frühere Lage gebracht wird. Bei der ersten Drehung dreht sich auch das Bild — relativ zum Beobachter — um $+\alpha$, während der zweiten Drehung (des Gegenstandes) dann wieder um $+\alpha$, was zusammen eine Drehung um $+2\alpha$ ergibt. — Dreht man also den Spiegel aus der bisher angenommenen Lage um 90^0 so, daß die konvexe Krümmung horizontal, die konkave vertikal liegt, so zeigt er ein um 180^0 gedrehtes, also ein verkehrtes Bild.

Bringt man einen kleinen Papierpfeil, auf eine Nadelspitze gesteckt, in die Nähe des Spiegels, so kann man auf diesem auch beobachten, wie der Drehungssinn des Bildes sich ändert und mit dem des Gegenstandes gleich wird, wenn der Gegenstand dem Spiegel genähert, den reellen Brennpunkt überschreitet.

Im Felde, August 1917.

Nachtrag.

Gelegentlich eines flüchtigen Durchblätterns der bekanntesten Handbücher konnte ich auch nirgends eine Erwähnung finden über die Spiegelung an Flächen mit negativem Krümmungsmaß.

In Winkelmanns Handbuch der Physik (Bd. VI, 1: Geometrische Optik von S. Czapski, S. 39) wird der Unterschied zwischen dem Fall, wo Bild und Gegenstand kongruent sind und wo sie symmetrisch sind, scharf betont; die Abbildung wird im ersten Fall als rechtwendige, im zweiten als rückwendige bezeichnet. Wenn aber ebendort bemerkt wird, daß ... „Brechungen oder eine gerade Zahl von Spiegelungen oder eine Kombination von beiden eine rechtwendige Abbildung bewirken, während die rückwendige durch eine ungerade Zahl von Spiegelungen oder durch Kombination von Brechungen mit einer ungeraden Zahl von Spiegelungen entsteht", so muß die Richtigkeit dieser Regel auf stigmatisch abbildende Systeme beschränkt werden. Werden auch astigmatische Abbildungen zugelassen, dann muß die Regel so präzisiert werden, daß in gewissen, im Punkt 5 angegebenen Fällen auch eine einzige oder allgemein eine ungerade Zahl von Spiegelungen eine rechtwendige Abbildung bewirken kann.

Der Spiegel kann — aber erst nach dem Kriege — von der Firma Max Kohl A.G. Chemnitz i. S. bezogen werden.

Budapest, II. phys. Inst. d. Universität, am 20. Januar 1918.

(Eingegangen 28. Januar 1918.)

Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre.

Von Victor F. Hess und Wilhelm Schmidt.

I. Theorie.

Die in freier Luft durch den ständigen Austausch der Massen von Schicht zu Schicht vor sich gehenden Änderungen vollziehen sich größtenteils nach einem gemeinsamen Gesetz[1]), das sich etwa in folgender Form darstellen läßt: Angenommen sei eine mit der Masse verknüpfte Größe S; der Gehalt der Masseneinheit Luft an S stelle eine Eigenschaft der Luft, s, dar. In der freien Atmosphäre ist s in jeder wagrechten Schicht im allgemeinen über weite Strecken genügend konstant, es ändert sich nur mit der Höhe h. Ist aber ein solches Gefälle von s vorhanden, dann bewirkt das eben erwähnte ständige Mischen ein unaufhörliches Fortwandern von S in der Richtung von höherem zu niedrigerem s. Es fließt dann ganz allgemein durch die Einheit wagrechter Fläche während der Zeiteinheit in der Richtung nach oben die Menge:

$$\mathfrak{S} = -A \cdot \frac{ds}{dh}.$$

Nimmt man als S die Bewegungsgröße in der Wagrechten, dann wird s proportional der Geschwindigkeit, $\mathfrak{S}$ gibt die an der Flächeneinheit angreifende Scherkraft: die Formel ist der Ansatz für die — „virtuelle" — Reibung, A deren Koeffizient. Wählt man S als Wärmemenge, so wird s proportional einer Temperatur, A entspricht dann dem Koeffizienten der scheinbaren Wärmeleitung; ist S ein Zusatz zur Luft, die Menge eines ihrer Bestandteile, dann entspricht derselbe Wert des A dem Koeffizienten der Scheindiffusion usw. Da A die Stärke des Mischens angibt und nur von diesem abhängt,

1) Wilhelm Schmidt, Wien. Sitzungsber. math.-naturw. Kl., IIa, **126**, 757, 1917; Ann. d. Hydrographie usw., **45**, 367, 431, 1917.

werde es als „Größe des Austausches" bezeichnet.

Tatsächliche Zahlenwerte des A in der freien Luft wurden vorderhand nur auf einem Umweg aus bekannten Paaren $\mathfrak{S}$ = Reibungskraft $-\frac{ds}{dh}$ = Geschwindigkeitsgefälle erhalten. So fanden Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup[1]) über Lindenberg im Durchschnitt eines Jahres

von 0—200 100—300 200—400 m Höhe
$A =$ 40 50 50 cm^{-1} g sec^{-1};

von 300—500 0—500 0—3000 m Höhe
$A =$ 60 50 50 cm^{-1} g sec^{-1},

Åkerblom[2]) in der durch das Häusermeer stärker beunruhigten Luft über Paris im Mittel $A = 90$, H. U. Sverdrup[3]) in der besonderen Verhältnissen unterliegenden Passatzone des Atlantischen Ozeans Werte zwischen 90 und 260. Wo nicht — wie im letzterwähnten Fall — besondere Schichtungen vorkommen, wird man für meteorologische Zwecke vorläufig ein über die Höhe im allgemeinen genügend konstantes A mit einem zwischen 50 und 100 liegenden Mittelwert annehmen können. Bloß in den bodennahen Schichten sinkt es stark, nähert sich etwa dem Werte 1.

Wir stellen uns nun die Aufgabe: s sei der Gehalt eines Grammes Luft an einem radioaktiven Gas (Zerfallskonstante λ); dieses werde fortwährend von der Erdoberfläche nachgeliefert; welches ist dann die Verteilung des s im Gleichgewichtszustand, wenn man mit Bezug auf das oben Gesagte durchwegs den gleichen Austausch A annimmt?

Wir betrachten die Luftschicht zwischen den Höhen h und $h + \triangle h$, denken uns aus ihr eine Säule von 1 qcm Querschnitt herausgeschnitten und rechnen, um welchen Betrag sich die darin enthaltene Emanationsmenge S in der Zeit dt ändert.

An der unteren Grenzfläche tritt nach der Grundformel ein:

$$d\mathfrak{S} = -\frac{ds}{dh} A\, dt,$$

an der oberen aus:

$$d\mathfrak{S}' = d\mathfrak{S} + \frac{d\mathfrak{S}}{dh} \cdot \triangle h,$$

es bleibt der Säule erhalten:

$$d\mathfrak{S} - d\mathfrak{S}' = -\frac{d\mathfrak{S}}{dh} \cdot \triangle h = \frac{d^2 s}{dh^2} \cdot A \cdot \triangle h \cdot dt.$$

In der Säule selbst befindet sich die Emanationsmenge $s \cdot \triangle h \cdot \varrho$ (ϱ = Luftdichte). Durch radioaktiven Zerfall verschwindet in der Zeit dt der Betrag:

$$s \cdot \varrho \cdot \lambda \cdot \triangle h \cdot dt.$$

Die gesamte Änderung des Emanationsgehalts in der Säule wird demnach:

$$dS = \left(\frac{d^2 s}{dh^2} \cdot A - s\varrho\lambda\right) \triangle h \cdot dt.$$

Ist Gleichgewichtszustand erreicht, so wird $dS/dt = 0$; für s gilt dann die Gleichung:

$$\frac{d^2 s}{dh^2} \cdot A - s\varrho\lambda = 0$$

mit der Lösung:

$$s = s_0 \cdot e^{-\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{A}} \cdot h}; \qquad (1)$$

die andere Lösung mit positivem Exponenten kommt nicht in Betracht, da der Emanationsgehalt, der vom Boden her unterhalten wird, nicht mit wachsender Höhe ohne Grenzen zunehmen kann.

Der Emanationsgehalt s nimmt somit nach einem einfachen Exponentialgesetz mit der Höhe ab und für die Geschwindigkeit der Abnahme ist, wie man sieht, das Verhältnis λ/A maßgebend.

Demnach wird das Gefälle:

$$\frac{ds}{dh} = -\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{A}} \cdot s. \qquad (2)$$

Ferner läßt sich der Emanationsfluß $\mathfrak{S}$, d. h. die Emanationsmenge, die in der betrachteten Höhe h durch jedes qcm in der Zeiteinheit nach oben wandert, rechnen:

$$\mathfrak{S} = -A \cdot \frac{ds}{dh} = \sqrt{\varrho\lambda A} \cdot s. \qquad (3)$$

Schließlich ergibt sich die gesamte in der Säule vom Querschnitt 1 oberhalb h bis an die Grenze der Atmosphäre enthaltene Emanationsmenge durch Integration von $s \cdot \varrho$ (d. i. des Emanationsgehaltes eines ccm) zwischen den Grenzen h und ∞, soweit durch die Annahme ϱ = konst. keine zu großen Fehler verursacht werden:

$$E = \int_h^\infty \varrho s_0 e^{-\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{A}} \cdot h} dh = \sqrt{\frac{\varrho A}{\lambda}} \cdot s. \qquad (4a)$$

Da Gleichgewicht zwischen Zerfall und Nachlieferung schon der Ableitung für jede einzelne Schicht zugrunde gelegt ist, so ist es auch für die Gesamtmengen erfüllt, d. h. es ist streng

$$E = \frac{\mathfrak{S}}{\lambda}. \qquad (4b)$$

1) Veröffentl. d. Geophys. Inst. Leipzig (2) **1**, 241, H. 10, 1915.
2) Nova Acta Upsala (4) **2**, Nr. 2.
3) Veröffentl. d. Geophys. Inst. Leipzig (2) **2**, 1, H. 1, 1917.

II. Anwendungen.

a) Radiumemanation.

1. Höhenverteilung. Für Radiumemanation ist $\lambda = 2{,}082 \cdot 10^{-6}$ sec^{-1}, die Halbwertszeit 3,85 Tage. Bei der Ableitung der Formel (1) haben wir ϱ als konstant angenommen, während es tatsächlich mit zunehmender Höhe abnimmt. Innerhalb einer Höhenstufe von je 1 km darf man ϱ aber doch als genügend konstant betrachten, da die äußersten Abweichungen vom Mittel nur etwa 6 Proz. betragen. Wir haben daher den Ausdruck $\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{A}}$ für die Schichten 0—1 km, 1—2 km usw. gerechnet, daraus die Abhängigkeit des Emanationsgehaltes s von der Höhe graphisch dargestellt, und zwar unter Annahme zweier Grenzwerte des Austausches, $A = 50$ und $A = 100$. So ergab sich (s ausgedrückt in Prozenten des Emanationsgehaltes am Boden s_0):

Tabelle I.

h km	für $A = 50$ s (Prozente)	für $A = 100$ s (Prozente)
0	100	100
1	49,4	60,7
2	25,0	37,7
2,5	18,6	30,4
3	13,5	24,5
4	7,4	16,2
5	4,5	10,9
6	2,5	7,5
7	1,5	5,3
8	0,9	3,8

Übrigens würde die Annahme eines innerhalb der ersten 5 Höhenkilometer konstanten ϱ (etwa $= 10^{-3}$) nichts wesentlich an den Zahlen ändern. Z. B. ergäben sich dann aus den Formeln:

für $A = 50$ $\quad s = s_0 \cdot e^{-0{,}645 \cdot 10^{-3} h}$

für $A = 100$ $\quad s = s_0 \cdot e^{-0{,}456 \cdot 10^{-3} h}$

z. B. die Werte

Tabelle II.

h km	für $A = 50$ s (in Prozenten)	für $A = 100$ s (in Prozenten)
2	27,3	39,2
4	7,4	15,5

Emanationsmessungen in der freien Atmosphäre sind bisher nicht vorhanden. Für einen Vergleich mit Beobachtungen müssen wir daher auf die einzigen auf einem Berggipfel ausgeführten Messungen von J. R. Wright und O. F. Smith[1]) zurückgehen. Diese fanden auf dem Mount Pauai (Philippinen) in rund 2500 m Höhe $s = 20 \cdot 10^{-15}$ Curie/g, in Manila (5 m) $s_0 = 69 \cdot 10^{-15}$ Curie/g, oben also 29 Proz. des Emanationsgehalts am Boden. In freier Atmosphäre wäre wohl ein noch kleinerer Wert zu erwarten. Geht man trotzdem von den erwähnten Zahlen Wrights und Smiths aus, so würde diesen am besten der Wert des Austausches $A = 83$ cm^{-1} g sec^{-1} entsprechen, der vollkommen innerhalb der zu erwartenden Grenzen liegt.

Es könnte vielleicht Bedenken erregen, daß wir die starke Abnahme des Austausches A gegen den Boden hin unberücksichtigt ließen. Streng genommen gelten die Formeln erst von der Höhe an, von der ab A genügend konstant vorausgesetzt werden darf. Jene Vernachlässigung fällt aber nicht ins Gewicht, denn wenn wir — die Verhältnisse arg übertreibend — bis $h = 50$ m $A = 2$ annehmen und von da an wie früher weiter gehen würden, so würden wir in 50 m $s = 81{,}7$ Proz. des Bodenwertes s_0 finden und in annähernd gleichem Verhältnis wären dann alle folgenden Angaben zu vermindern. Es ändert sich also bloß der Ausgangswert und selbst dieser nur innerhalb der Grenzen der stets vorhandenen Schwankungen.

2. Gefälle. Aus der Formel (2) folgt unter der Annahme eines mittleren $\varrho = 10^{-3}$ g/ccm

für $A = 50$ $\quad ds/dh = -4{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot s$

für $A = 100$ $\quad ds/dh = -6{,}45 \cdot 10^{-6} \cdot s$

Nimmt man für s_0 den Mittelwert sämtlicher Beobachtungen[1]) (Eve, Ashman, Satterly, Wright und Smith) $s_0 = 88 \cdot 10^{-18}$ Curie/ccm $= 73 \cdot 10^{-15}$ Curie/g, so folgt

	am Boden	in 1250 m Höhe
für $A = 50$	$ds/dh = -3{,}33 \cdot 10^{-19}$	$ds/dh = -1{,}39 \cdot 10^{-19}$ Curie/g. cm
für $A = 100$	$ds/dh = -4{,}72 \cdot 10^{-19}$	$ds/dh = -2{,}55 \cdot 10^{-19}$ Curie/g. cm.

Die Beobachtungen in Manila-Mount Pauai haben

$$ds/dh = -2{,}0 \cdot 10^{-19} \text{ Curie/g. cm}$$

geliefert, also einen Wert, der gut mit dem für 1250 m, die Mitte der beiden Höhenlagen, gerechneten stimmt.

3. Emanationsabgabe des Erdbodens. Formel (3) gestattet, aus dem bekannten Austausch A und Emanationsgehalt s_0 den Emanationsfluß $\mathfrak{S}_0$ in Bodennähe zu rechnen und mit

1) Diese Zeitschr. 15, 31, 1914; Phys. Rev. (2) 5, 459, 1915.

1) Vgl. E. v. Schweidler und K. W. F. Kohlrausch, Atmosph. Elektrizität S. 223 in Graetz' Handbuch der Elektrizität, III. Bd. Leipzig, J. A. Barth 1915.

den Bestimmungen der Emanationsabgabe des Erdbodens zu vergleichen.

Nehmen wir den Mittelwert

$$s_0 = 73 \cdot 10^{-15} \text{ Curie/g},$$

so wird

für $A = 50$ $\mathfrak{S}_0 = 2{,}36 \cdot 10^{-17}$ Curie/qcm sec
für $A = 100$ $\mathfrak{S}_0 = 3{,}33 \cdot 10^{-17}$ Curie/qcm sec.

Smyth[1]) fand in Dublin als Mittel aus etwa sechsmonatigen Beobachtungen (August bis Februar)

$$\mathfrak{S}_0 = 7{,}4 \cdot 10^{-17} \text{ Curie/qcm sec.}$$

Also auch hier stimmen die Größenordnungen genügend überein.

4. Gesamte in der Erdatmosphäre enthaltene Emanationsmenge. Wir gehen von der Formel (4b) aus und erhalten mit den eben berechneten Werten von $\mathfrak{S}$ über jedem qcm festen Bodens die Gesamtmenge an Radiumemanation E_0

für $A = 50$ $E_0 = 1{,}13 \cdot 10^{-11}$ Curie/qcm
für $A = 100$ $E_0 = 1{,}60 \cdot 10^{-11}$ Curie/qcm.

Die von den wasserbedeckten Teilen der Erdoberfläche abgegebenen Emanationsmengen können gegenüber denen vom Festlande vollständig vernachlässigt werden. Die eben erhaltenen Zahlen multipliziert mit dem Flächeninhalt der Festlandsfläche der Erde ($1{,}46 \cdot 10^{18}$ qcm) geben dann die Grenzwerte für die gesamte, in der Erdatmosphäre enthaltene Emanationsmenge Q:

für $A = 50$ $Q = 1{,}64 \cdot 10^7$ Curie
für $A = 100$ $Q = 2{,}34 \cdot 10^7$ Curie.

b) Thoriumemanation.

Für diese ist $\lambda = 1{,}27 \cdot 10^{-2}$ sec^{-1}, die Halbwertszeit 54,5 Sekunden. Mit $A = 100$ und $\varrho = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ (bodennahe Schicht) wird:

$$s = s_0 \cdot e^{-3{,}94 \cdot h},$$

somit für $h = 1$ m $s = 96$ Proz. | des Emanationsgehalts s_0 in der Höhe o,
10 m $s = 67{,}5$ „ |
100 m $s = 1{,}9$ „ |

Wir sehen also, daß sich die Thoriumemanation, wie es nach ihrer geringen Lebensdauer von vornherein zu erwarten ist, in der freien Atmosphäre kaum vorfinden wird. In Wirklichkeit kann sie sich, wegen des niedrigen Wertes von A in bodennaher Schicht, noch weniger weit vom Erdboden entfernen.

Bei $A = 2$, einem für die untersten Meter der Atmosphäre ziemlich wahrscheinlichen Wert, würden sich nach der Formel $s = s_0 \cdot e^{-2{,}76 \cdot 10^{-4} \cdot h}$ die oben angeführten Prozentzahlen 96, 67,5 1,9 schon in 0,14, 1,4 und 14 m finden.

Ein Vergleich mit der Erfahrung ist mangels vorliegender Beobachtungen derzeit nicht möglich.

1) Phil. Mag. (6) **24**, 632, 1912.

c) Actiniumemanation.

Für diese ist $\lambda = 1{,}77 \cdot 10^{-1}$ sec^{-1}, die Halbwertszeit 3,92 Sekunden. Da die Lebensdauer dieser Emanation noch kürzer ist als die der Thoriumemanation, so rechnen wir gleich mit dem für die bodennächsten Schichten angenommenen Werte $A = 2$ cm^{-1} g sec^{-1} und erhalten:

$$s = s_0 \cdot e^{-9{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot h}.$$

Es werden demnach in 1 bzw. 10 m 37 bzw. 0,05 Proz. des Gehaltes knapp am Erdboden zu erwarten sein.

d) Verteilung der festen Zerfallsprodukte.

Mit der Verteilung einer Emanation eng verknüpft ist die ihrer Zerfallsprodukte. Obwohl feste Körper, wegen sie sich wegen ihrer feinen Zerteilung nur sehr langsam gegenüber der sie umgebenden Luft[1]); sie können deshalb im allgemeinen ebenso an deren Masse gebunden gedacht werden, wie eine gasförmige Beimengung, zumal sie sich häufig an Staubkerne oder an Langevinsche Ionen anlagern. Die Grundformel für den Austausch gilt dann auch für sie.

Ein Vergleich der für *Ra*-, *Th*- und *Ac*-Emanation gefundenen Verteilungen zeigt deutlich die bedeutend geringere Ausbreitungsfähigkeit der kurzlebigeren. Die vergänglicheren Zerfallsprodukte können sich demnach nicht weit vom Ort ihrer Entstehung entfernen, ihre Verteilung schließt sich eng an die der entsprechenden Emanation an.

Das ist z. B. bei den ersten drei Gliedern[2]) der auf die Radiumemanation zurückgehenden Reihe der Fall. *RaA*—*RaC* zerfallen mindestens hundertmal schneller als die Emanation. Jede dieser Induktionen nimmt also mit zunehmender Höhe genügend genau nach dem unter a) 1. dargestellten Gesetz ab, jede ist auch im Mittel im Gleichgewicht mit der am selben Ort befindlichen Emanationsmenge.

Anders *RaD*. Seine Zerfallskonstante ist $\lambda = 1{,}37 \cdot 10^{-9}$, entsprechend einer Halbwertszeit von 16 Jahren. Wir wollen versuchsweise rechnen, wie sich die aus der Emanation der alleruntersten Luftschicht entstehende Menge von *RaD* für sich allein verbreitet. Es wird nach Formel (1) mit $\varrho = 10^{-3}$ (zum Zwecke rohen Überschlags für alle Höhen gleich angenommen):

1) Die geladenen im elektrischen Feld der Erde mit Geschwindigkeiten von der Größenordnung 1—3 cm/sec. Das kommt gegenüber den Strömungsgeschwindigkeiten beim Austausch (etwa m/sec) gar nicht in Betracht.

2) Die Zerfallsprodukte *RaC'* und *RaC''* kommen wegen ihres geringen Anteils nicht in Betracht.

für $A = 50$ $s = s_0 \cdot e^{-1{,}66 \cdot 10^{-2} h}$
für $A = 100$ $s = s_0 \cdot e^{-1{,}17 \cdot 10^{-2} h}$,

woraus folgt:

Tabelle III.

h km	für $A = 50$ s (in Prozenten)	für $A = 100$ s (in Prozenten)
2	96,4	97,4
6	90,2	93,0
10	84,7	89,0

Darüber müßten sich noch die aus den höheren Schichten entstandenen Mengen RaD überlagern, es käme also zu einer fast vollkommen gleichförmigen Verteilung. Dann steht aber RaD — alles gilt auch für die weiteren Zerfallsprodukte RaE und RaF (Polonium) — nicht mehr im Gleichgewicht mit der Emanation: in den hohen Schichten ist es im Überschuß vorhanden, in den unteren bleibt es hinter der Gleichgewichtsmenge zurück. Aus unmittelbaren Messungen seines Betrages könnte man sogar schließen, bis zu welchen Höhen die Atmosphäre in den Austausch der unteren Schichten mit einbezogen ist.

In der Thoriumreihe schließt sich ThA der Verteilung der Emanation vollkommen an. ThB ($\lambda = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$, Halbwertszeit 10,6 Stunden) reicht aber höher hinauf. Gemäß den Ergebnissen unter b) setzen wir mit genügender Annäherung voraus, es entstünde nur in den bodennächsten Schichten, rechnen also nach Formel (1) mit $\varrho = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$. Wir nehmen schon von vornherein eine Zweiteilung der Bewegungszustände der Luftschichten an wie in a) 1.: bis 50 m $A = 2$, weiter $A = 50$ bzw. 100.

Es wird

für $A = 2$ $s = s_0 \cdot e^{-1{,}045 \cdot 10^{-1} h}$
für $A = 50$ $s = s_0 \cdot e^{-0{,}209 \cdot 10^{-1} h}$
für $A = 100$ $s = s_0 \cdot e^{-0{,}148 \cdot 10^{-1} h}$,

daraus die Werte:

Tabelle IV.

h m	für $A = 50$ s (in Prozenten)	für $A = 100$ s (in Prozenten)
0	100	
50	58,0	
100		
500	52,4	54,0
1000	22,8	29,4
1500	8,0	13,7
2000	2,8	6,4
	1,0	3,0

Die weiteren Zerfallsprodukte ThC, ThC' und ThC'' folgen wegen ihrer geringeren Lebensdauer (rund der zehnte Teil von ThB) der gleichen Höhenverteilung.

In der Actiniumreihe ist $Ac\,B$ ($\lambda = 3{,}20 \cdot 10^{-4}$, Halbwertszeit 36 Minuten) für die folgenden Zerfallsprodukte maßgebend. Wir dürfen es ebenfalls bloß in den alleruntersten Schichten entstanden denken — vgl. c) — und erhalten

mit $A = 2$ $s = s_0 \cdot e^{-4{,}38 \cdot 10^{-4} h}$
mit $A = 50$ $s = s_0 \cdot e^{-8{,}76 \cdot 10^{-3} h}$
mit $A = 100$ $s = s_0 \cdot e^{-6{,}20 \cdot 10^{-3} h}$,

daraus mit der gleichen Zweiteilung wie oben:

Tabelle V.

h m	für $A = 50$ s (in Prozenten)	für $A = 100$ s (in Prozenten)
0	100	
50	11,4	
100		
200	7,2	8,3
300	3,0	4,8
400	1,2	3,2
	0,5	1,7

AcC und AcC'' werden sich nur unbedeutend weiter ausbreiten.

Alles das gilt natürlich nur unter den gleichen Voraussetzungen wie die anderen Ableitungen: für die Mittelwerte bei Fehlen besonderer Störungen.

Die Verteilung der Emanationen und ihrer Zerfallsprodukte durch reine Diffusion erfolgt nach denselben Formeln, wie die betrachtete Verteilung durch ungeordnete Luftströmungen; man müßte nur an Stelle von A/ϱ den Diffusionskoeffizienten setzen[1]). Letzterer ist für Radiumemanation in Luft nach v. Hevesy[2]) etwa 0,07 qcm/sec, also rund 10^6 mal kleiner als der Koeffizient A/ϱ der „Scheindiffusion". Neben den hier von uns behandelten Wirkungen des Austausches durch ungeordnete Bewegung spielt also die eigentliche Diffusion eine gänzlich zu vernachlässigende Rolle.

Zusammenfassung.

Auf Grund des gegenwärtigen Standes unserer Kenntnisse über den Austausch bei der ungeordneten Bewegung in freier Luft wurden Gesetze für die Höhenverteilung eines radioaktiven Gases in der Atmosphäre und für dessen Abgabe von seiten des Erdbodens gefunden. Die berechneten Werte stimmen mit den Beobachtungen, soweit solche vorliegen (Radiumemanation), befriedigend überein; Thorium- und Actiniumemanation könnten sich nur in den alleruntersten Schichten bemerkbar machen. Dieselben Betrachtungen wurden auch auf die festen Zerfallsprodukte der Emanationen ausgedehnt.

1) Tatsächlich hat ja E. Rutherford (Radioaktivität S. 285, 1906) auf entsprechende Weise den Diffusionskoeffizienten der Thoriumemanation bestimmt.

2) Jahrb. d. Rad. u. Elektron. 10, 213, 1913.

Die Halbwertshöhe, d. i. die Höhe, in der der Gehalt — auf ein Gramm Luft bezogen — auf die Hälfte des Betrages am Erdboden gesunken ist, wird danach für

RaEm und deren kurzlebige Zerfallsprodukte	rund 1200 m
RaD und Folgeprodukte	praktisch gleichförmig bis 10 km Höhe
ThEm und *ThA*	2—3 m
ThB und Folgeprodukte . . .	100—150 m
AcEm und *AcA*	0,5—1 m
AcB und Folgeprodukte . . .	10—20 m.

Wien, Institut für Radiumforschung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften und k. k. Zentralanstalt für Meteorologie u. Geodynamik.

(Eingegangen 21. Januar 1918.)

Über die Ursache der Zunahme der Ionisation der Atmosphäre mit der Höhe.

Von A. Gockel.

Aus gleichzeitigen Messungen der Ionisation und der ultravioletten Sonnenstrahlung im Hochgebirge, die einen deutlichen Parallelismus zwischen diesen beiden Faktoren ergaben, glaubt Herr Dember[1]) schließen zu sollen, daß die Zunahme der Ionisation mit der Höhe durch die größere Intensität der Strahlung dort verursacht ist. Angesichts der Resultate Herrn Lenards, wonach nur äußerst kurzwellige Strahlen, die doch schon in den uns unzugänglichen Schichten der Atmosphäre absorbiert werden, merklich ionisierend wirken und des Nachhinkens des Maximums der Ionisation gegen das Maximum der Strahlungsintensität muß allerdings die Annahme eingeführt werden, daß ein beträchtlicher Teil der vom Licht erzeugten Ionen durch Luftströmungen und vom vertikalen Leitungsstrom aus höheren Schichten der Atmosphäre zum Beobachtungsort hingeführt wird. Mit Recht weist aber Herr Dember auf eine Schwierigkeit bei der Deutung seiner Messungsresultate hin. Die Zahl der gemessenen Ionen hängt nicht nur von der Zahl der in der Zeiteinheit erzeugten, sondern auch von der Zahl der in derselben Zeit molisierten ab, und die Molisierungsgeschwindigkeit wächst rasch, wenn die relative Feuchtigkeit über 80 Proz. hinausgeht. Da mit der Zunahme der Intensität der Sonnenstrahlung im Laufe des Tages die relative Feuchtigkeit abnimmt, kann leicht eine Zunahme der Ionisation auf Rechnung einer direkten Sonnenstrahlung gesetzt werden, während sie in Wirklichkeit nur eine Folge der Abnahme der relativen Feuchtigkeit ist. Herr Dember[1]) hat deshalb seine Messungen auf der Alta Vista am Pic von Teneriffa in einer Höhe von 3200 m wiederholt.

Auch an diesem äußerst trockenen Orte — die relative Feuchtigkeit schwankte nur zwischen 10 und 35 Proz. — fand Herr Dember, daß wenigstens die positive Ionisation 2—3 Stunden nach dem höchsten Stand der Sonne ihr Maximum erreicht; und daß die Änderung der relativen Feuchtigkeit nicht die Ursache dieser Erscheinung sein kann.

Nach Herrn Dember ist, wenn nicht ein anderer unberücksichtigter Faktor mitspielt, das ultraviolette Licht als Ursache der nachmittägigen Erhöhung der Ionisation anzusehen.

Ich kann mich dieser letzteren Ansicht nicht anschließen, sondern glaube, daß faktisch ein anderer Faktor mitspielt, nämlich die durchdringende Strahlung, und daß die sowohl im Ballon als auch überall im Hochgebirge beobachtete Zunahme der Ionisation mit der Höhe auf Rechnung der Zunahme dieser letzteren zu setzen ist. Selbst die tägliche Schwankung der Ionisation läßt sich durch den Gang der durchdringenden Strahlung erklären. Hess und Kofler[2]) fanden auf dem Obir in den Tauern in einer Höhe von 2100 m, daß im Sommer, also in der Jahreszeit, in der auch Dember seine Messungen vornahm, die durchdringende Strahlung um 16 Uhr ihr Maximum erreichte. Die Amplitude der Tagesschwankung betrug 0,5 Ionen ccm/sec. In einer Höhe von 3200 m, in welcher der absolute Wert der durchdringenden Strahlung schon beträchtlich höher ist, kann auch die Amplitude der täglichen Schwankung größer sein. Der Gang dieser Schwankung darf aber, worauf auch Hess (l. c.) hinweist, keinenfalls der Änderung der Sonnenstrahlung zugeschrieben werden.

Gegen den direkten Einfluß der Sonnenstrahlung auf die Ionisation sprechen schon die Demberschen Messungen am Pic von Teneriffa selbst. Zunächst ist gar kein Einfluß dieser Strahlung auf die Zahl der negativen Ionen zu erkennen. Im Gegenteil, gerade wie es in der Ebene der Fall ist, hat die Zahl dieser Ionen ein Maximum in den ersten Morgenstunden und nimmt dann im Laufe des Tages ab. Das Minimum beobachtet man teils gegen 10 *a* teils gegen 3 *p*. Auch das Maximum der positiven Ionen wurde an den 6 Beobachtungstagen nur 4 mal nach-

1) H. Dember, diese Zeitschr. 13, 207, 1912.

1) Dember, Ann. d. Phys. 53, 198, 1917.
2) V. F. Hess u. M. Kofler, diese Zeitschr. 18, 585, 1917.

mittags, dagegen 2 mal vormittags beobachtet, und zwar dieses gerade zu windstillen Zeiten. Es ist ja auch klar, daß Windstille die Ansammlung positiver Ionen in der Nähe des Berggipfels begünstigt. Es dürften demnach die Demberschen Resultate viel mehr durch die wechselnde Windstärke als durch die Sonnenstrahlung beeinflußt sein.

Gegen einen direkten Einfluß der Sonnenstrahlung auf die Ionisation spricht, wie ich dieses schon an anderen Orten[1]) hervorgehoben habe, der Umstand, daß Dember auf dem Col de Bertol (3400 m) im Wallis eine weitaus stärkere Ionisation als in dem unmittelbar darunter (1900 m) gelegenen Arolla fand, während die Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung an beiden Orten keinen Unterschied aufwies.

Ebenso spricht gegen den direkten Einfluß der Sonnenstrahlung auf die Ionisation die von Dorno in dem sonnenreichen Davos durch Registrierung festgestellte Zunahme der Leitfähigkeit während der Nacht mit einem Höchstwert der 24 stündigen Periode vor Sonnenaufgang, ein Resultat, dem sich auch meine Einzelmessungen hier gut anpassen und mit dem auch das fast an allen Orten konstatierte Minimum des Potentialgefälles zwischen 3 und 4 a gut übereinstimmt. Angesichts dieser Beobachtungen und des oben schon erwähnten Umstandes, daß die bis zu einer Höhe von 3000 m herabkommenden kurzwelligen Lichtstrahlen gar nicht ionisierend wirken, wird man also wohl an der durchdringenden Strahlung als Quelle der Vermehrung der Ionisation in der Höhe festhalten müssen. Von großem Einfluß ist natürlich auch der Umstand, daß bei wolkenfreiem Himmel die Luft in der Höhe weitaus ärmer an Kondensationskernen ist als in der Niederung, die Molisierung der Ionen in der Höhe also langsamer vor sich geht als in der Tiefe.

Den Einfluß der Zahl der Kondensationskerne auf die der leicht beweglichen Ionen zeigen die großen Unterschiede in der Zahl der letzteren, die ich[2]) in gleicher Höhe und bei ähnlicher Wetterlage auf der Nord- und Südseite der Berner Alpen in der reinen trockenen Luft des Wallis einerseits, und der von der Ebene her mit Kondensationskernen versehenen Luft im Lauterbrunner Tal andererseits gefunden habe; und ebenso die verhältnismäßig geringe Ionisation auf dem Weißenstein im Jura, an dessen Fuß eine Papierfabrik und Eisenwerke liegen.

Freiburg (Schweiz), Januar 1918.

(Eingegangen 30. Januar 1918.)

1) A. Gockel, Neue Denkschriften der Schweizer Naturforsch. Gesellschaft **54**, Abh. 1, S. 56.
2) L. c.

Notiz zu E. Schrödingers Arbeit[1] „Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes".

Von A. Einstein.

Herr Schrödinger hat durch Ausrechnung gezeigt, daß bei passender Wahl des Koordinatensystems alle Energiekomponenten t_σ^α des Gravitationsfeldes einer Kugel (außerhalb dieser) verschwinden[2]). Begreiflicherweise wundert sich Herr Schrödinger über dies Ergebnis, das auch mir anfänglich sehr wunderlich erschien. Insbesondere fragt er sich, ob die t_σ^α wirklich als die Energiekomponenten aufzufassen seien. Ich will zu dem von Herrn Schrödinger angeführten Bedenken noch zwei weitere fügen:

1. Während die Energiekomponenten T_σ^α der Materie einen Tensor bilden, ist dieses für die als „Energiekomponenten" des Gravitationsfeldes erklärten Größen t_σ^α nicht der Fall.
2. Die Größen $T_{\sigma\tau} = \sum_\alpha T_\sigma^\alpha g_{\alpha\tau}$ sind in bezug auf die Indizes σ und τ symmetrisch, nicht aber die analogen $t_{\sigma\tau} = \sum_\alpha t_\sigma^\alpha g_{\alpha\tau}$.

Aus dem unter 1. genannten Grunde tragen auch H. A. Lorentz und Levi-Civita Bedenken, in den t_σ^α die Energiekomponenten der Gravitation anzuerkennen.

Wenn ich auch diese Bedenken mitempfinde, bin ich doch überzeugt, daß eine zweckmäßigere Festsetzung für die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes, als die von mir getroffene, nicht möglich ist. Die nach meiner Meinung überzeugendste formale Begründung für diese Wahl habe ich in der Arbeit „Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie" (Berliner Sitz.-Ber. **42**, 1111, 1916) gegeben.

Was das Schrödingersche Bedenken anbelangt, so liegt seine überzeugende Kraft in der Analogie zur Elektrodynamik, in welcher die Spannungen und die Energiedichte jedes Feldes von Null verschieden sind. Ich vermag aber keinen Grund dafür zu finden, daß dies auch für Gravitationsfelder zutreffen müsse. Es kann

1) Diese Zeitschr. **19**, 4, 1918.
2) Auf das Verschwinden der Komponente t_4^4 in dem hier behandelten Falle hat mich vor wenigen Monaten bereits Herr G. Nordström aufmerksam gemacht.

sehr wohl Gravitationsfelder ohne Spannungen und ohne Energiedichte geben. Die Bedeutung der t_σ^α liegt darin, daß sie mit den T_σ^α der Materie die Gleichungen

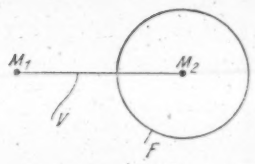
$$\sum_\alpha \frac{\partial (T_\sigma^\alpha + t_\sigma^\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (1)$$

liefern, welche über ein dreidimensionales Volumen V integriert die Gestalt

$$\frac{d}{d x_1}\int (T_\sigma^4 + t_\sigma^4)\, d V = \int \left[(T_\sigma^1 + t_\sigma^1) \cos n x_1 + (T_\sigma^2 + t_\sigma^2) \cos n x_2 + (T_\sigma^3 + t_\sigma^3) \cos n x_3 \right] d S \qquad (1a)$$

der Erhaltungssätze des Impulses und der Energie annehmen, und zwar sind die t_μ^α die einzigen Größen dieser Eigenschaft, welche nur erste Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ enthalten.

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß die Spannungen t_σ^α bei solchen Gravitationsfeldern, welche zwischen mehreren Körpern Wechselwirkungen vermitteln, keineswegs verschwinden können. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung: Es seien M_1 und M_2 zwei dauernd ruhende, durch einen starren Stab V miteinander verbundene Körper. F sei eine M_2 einschließende, M_1 ausschließende Fläche, welche also den Stab V schneidet. Dieser Stab ist wegen der Gravitationsanziehung der beiden Körper aufeinander in einem Spannungszustande. Ist der Stab geradlinig und parallel der X_1-Achse



des Koordinatensystems, so liefert die erste der Gleichungen (1a)

$$0 = \int T_1^1\, d S + \int (t_1^1 \cos (n x_1) + t_1^2 \cos (n x_2) + t_1^3 \cos (n x_3))\, d S .$$

Da in unserem Falle das erste dieser Integrale nicht verschwindet, kann auch das zweite nicht verschwinden. Es können also nicht t_1^1, t_1^2, t_1^3 überall auf S verschwinden. Diese Betrachtung läßt sich mutatis mutandis in allen Fällen anwenden, wo das betrachtete Feld Wechselwirkungen zwischen Körpern vermittelt. Dies ist aber bei dem von Schrödinger betrachteten Felde nicht der Fall. —

Auch die formalen Bedenken 1. und 2. können nach meiner Meinung nicht dazu führen, die von mir vorgeschlagene Fassung des Impuls-Energiesatzes abzulehnen. Denn die den Satz ausdrückende Gleichung gilt für beliebige Wahl des Bezugssystems; weitere formale Forderungen zu stellen, erscheint nicht berechtigt. Gegenüber dem Bedenken 1. habe ich in einer demnächst in den Sitzungsber. d. Berl. Akademie erscheinenden Arbeit Stellung genommen.

(Eingegangen 5. Februar 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Zum gegenwärtigen Stand der Quantentheorie.

Von Ludwig Flamm.

Der kühne Gedanke Plancks, daß Emission und Absorption nicht kontinuierlich, sondern in bestimmten endlichen Quanten vor sich gehe, führte nicht nur zu einer befriedigenden Theorie der Energieverteilung im Spektrum des schwarzen Körpers, sondern ließ sich auch sehr erfolgreich für eine Theorie der spezifischen Wärme verwerten. So sehr man auch die Erfolge der neuen Idee anerkennen mußte, so stieß zunächst besonders die Vorstellung einer quantenhaften Strahlungsabsorption auf heftigen Widerspruch. Die Theorie der Hohlraumstrahlung konnte von Planck daraufhin in solcher Weise abgeändert werden, daß kontinuierliche Absorption und nur quantenhafte Emission vorausgesetzt waren und trotzdem dieselbe Schlußformel für die Energieverteilung im Spektrum des schwarzen Körpers resultierte. Anders verhält es sich in der Theorie der spezifischen Wärme. Hier führten die beiden Gestalten der Theorie zu etwas verschiedenen Endformeln, ohne daß zwischen diesen bisher eine endgültige Entscheidung gelungen wäre.

Mittlerweile erzielte die Quantentheorie auf einem ganz verschiedenen Gebiete bedeutende

Erfolge, nämlich in der Theorie der Serienspektra. Gerade hier erfuhr sie auch in der letzten Zeit eine strengere Formulierung und Weiterbildung. Es mag sein, daß auch jetzt noch keine sichere Entscheidung zwischen der ersten schärferen und zweiten gemäßigteren Formulierung der Quantentheorie behauptet werden kann. Jedenfalls wurde diese jüngste Erweiterung der Quantentheorie auf Grund der ursprünglichen Fassung Plancks ausgebaut, da sich diese bedeutend einfacher erweist. Das Auftreten von Wirkungsquanten ist ja an und für sich unseren bisherigen Vorstellungen gegenüber ungewohnt und rätselhaft. Ob diese nur bei Emission oder auch bei Absorption eine Rolle spielen, ist demgegenüber von sekundärer Wichtigkeit; die Kernfrage wird durch die zweite, mildere Formulierung Plancks kaum dem Verständnis näher gebracht. In der Theorie der Serienspektra zeigte sich die ursprüngliche Fassung der Quantentheorie jedenfalls als die derzeit heuristisch wertvollere. Andererseits mag es von Wert sein, die durch den Ausbau der Theorie der Serienspektra gewonnenen genaueren Vorstellungen zurück auf die Theorie der spezifischen Wärme und der Hohlraumstrahlung anzuwenden und so das gesamte Gebiet der Quantentheorie nach einem einheitlichen Gesichtspunkte zu behandeln. Gerade die Theorie der spezifischen Wärme läßt bei der Verworrenheit, die hier in der Literatur zutage tritt, das Bedürfnis nach neuen leitenden Ideen besonders stark empfinden. Ob sich die so gewonnene einfachste Darstellung auch hier bewährt, muß der Erfolg zeigen. Zumindestens mag es erwünscht erscheinen, zu sehen, wie man aus möglichst wenigen, bewährten Grundvorstellungen heraus auf die einfachste Weise zu den Hauptergebnissen der Quantentheorie gelangt. Dies soll in den vorliegenden Zeilen zu erreichen versucht werden.

§ 1.

Die wesentliche Grundlage der Quantentheorie läßt sich heute auch in der folgenden einfachen Gestalt aussprechen: Für irgendein körperliches System, das aus einer großen Anzahl N gleichartiger Elemente besteht, ist jedes der N Elemente nur einer abzählbaren Menge von Zuständen[1])

$$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots . Z_n, \ldots .$$

fähig. Diesen Zuständen sollen die Energien

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots . \varepsilon_n, \ldots .$$

entsprechen. In einem bestimmten Augenblick sind in jedem dieser Zustände eine gewisse Anzahl von Elementen, und zwar allgemein in dem Zustande Z_n die Anzahl N_n. Es ist notwendigerweise, da jedes Element immer in einem und nur einem dieser Zustände zu einer bestimmten Zeit sich befindet,

$$\Sigma N_n = N .$$

Man pflegt die Bezeichnung

$$\frac{N_n}{N} = w_n$$

einzuführen; dann schreibt sich die obige Gleichung

$$\Sigma w_n = 1 . \qquad (1)$$

Wenn jeder der betrachteten Zustände der Elemente gleichwahrscheinlich ist, so berechnet sich die Entropie des Systems nach der bekannten Formel[1])

$$S = - N k \Sigma w_n \ln w_n . \qquad (2)$$

Die Gesamtenergie des Systems ist

$$E = \Sigma N_n \varepsilon_n = N \Sigma w_n \varepsilon_n . \qquad (3)$$

Wir wollen den Zustand thermodynamischen Gleichgewichts näher untersuchen, der sich bei einem System von gegebener Teilchenzahl N für eine bestimmte Gesamtenergie E einstellt. Nach den Grundsätzen der Thermodynamik ist er durch den Maximalwert bestimmt, den die Entropie unter den vorgegebenen Bedingungen annehmen kann. Im thermodynamischen Gleichgewichtszustande ist demnach

$$\delta S = - N k \Sigma (\ln w_n + 1) \delta w_n = 0 ,$$

wozu noch als Nebenbedingungen zufolge (3)

$$N \Sigma \varepsilon_n \delta w_n = 0$$

und zufolge (1)

$$\Sigma \delta w_n = 0$$

hinzukommen. Mit Hilfe zweier willkürlicher Konstanten α und β fassen wir die drei Variationsgleichungen in eine zusammen, indem wir die oberste Gleichung durch $-Nk$ dividieren, dagegen die zweite Gleichung mit β/N und die letzte Gleichung mit $(-\ln \alpha - 1)$ multiplizieren und alle drei addieren. Das gibt

$$\Sigma (\ln w_n + \beta \varepsilon_n - \ln \alpha) \delta w_n = 0 ,$$

woraus folgt

$$w_n = \alpha e^{-\beta \varepsilon_n} \qquad (4)$$

als Verteilung im thermodynamischen Gleichgewichte. Die Konstanten α und β bestimmen sich aus den zwei Nebenbedingungen; es liefert durch Einsetzen von (4) Gleichung (1)

$$\alpha \Sigma e^{-\beta \varepsilon_n} = 1 \qquad (5)$$

und Gleichung (3)

$$\alpha N \Sigma \varepsilon_n e^{-\beta \varepsilon_n} = E . \qquad (6)$$

Aber die Auflösung dieses Gleichungssystems

1) Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 320, 1916.

1) Planck, Theorie der Wärmestrahlung, 2. Aufl., S. 123, Leipzig 1913.

wird im allgemeinen auf Schwierigkeiten stoßen. Dagegen bringt man mit Hilfe dessen den Ausdruck für die Entropie auf eine sehr einfache Gestalt. Man erhält durch Einsetzen von (4) in (2) zunächst

$$S = Nk\,\Sigma[\alpha\, e^{-\beta\varepsilon_n}\cdot(\beta\varepsilon_n - ln\,\alpha)]$$

und weiter vermöge der Beziehungen (5) und (6)

$$S = k(\beta E - N\,ln\,\alpha).$$

Zieht man noch die Gleichgewichtszustände des Körpers bei anderen Werten der Gesamtenergie E aber sonst ganz ungeänderten Verhältnissen in Betracht, so liefert die Differentiation dieser Gleichung

$$dS = k(\beta dE + E d\beta - N d\,ln\,\alpha).$$

Andererseits gibt (6) durch (5) dividiert die Beziehung

$$E = N\frac{\Sigma\varepsilon_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{\Sigma e^{-\beta\varepsilon_n}} = -N\frac{d}{d\beta}\,ln\,\Sigma e^{-\beta\varepsilon_n}.$$

Durch Logarithmieren von (5) folgert man weiter

$$E = N\frac{d\,ln\,\alpha}{d\beta}$$

oder

$$E\,d\beta = N\,d\,ln\,\alpha.$$

Die Differentialgleichung für die Entropie reduziert sich somit auf

$$dS = k\beta\,dE.$$

Wenn keine äußere Arbeit geleistet wird (Volumenkonstanz), liefert die Thermodynamik die einfache Beziehung (zweiter Hauptsatz)

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T},$$

wodurch die absolute Temperatur T in unsere Formeln eingeführt wird. Man erhält so

$$k\beta = \frac{1}{T},$$

also für die eine der beiden Konstanten

$$\beta = \frac{1}{kT}. \tag{7}$$

Die Konstante β ist demnach in einfachster Weise durch die absolute Temperatur bestimmt. Die Entropieformel lautet demnach

$$S = \frac{E}{T} - Nk\,ln\,\alpha.$$

Aus Gleichung (5) erhält man durch Logarithmieren und Berücksichtigung von (7)

$$ln\,\alpha + ln\,\Sigma e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} = 0.$$

Damit eliminiert man auch noch die andere Konstante α aus der Entropiegleichung und erhält

$$S = \frac{E}{T} + Nk\,ln\,\Sigma e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}. \tag{8}$$

Wir wollen noch die Größe

$$\Psi = Nk\,ln\,\Sigma e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \tag{9}$$

als „charakteristische Funktion“ des Systems[1]) einführen. Man erhält durch Differentiation

$$\frac{d\Psi}{dT} = \frac{N\,\Sigma\,\varepsilon_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}{T^2\,\Sigma e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}.$$

Vermöge der Gleichungen (5), (6) und (7) schreibt sich dies einfach

$$\frac{d\Psi}{dT} = \frac{E}{T^2}.$$

Die Gesamtenergie des Systems berechnet sich somit nach der einfachen Formel

$$E = T^2\frac{d\Psi}{dT}. \tag{10}$$

Damit erhält man auch für die Entropie zufolge Gleichung (8) die einfache Formel

$$S = T\frac{d\Psi}{dT} + \Psi = \frac{d(T\Psi)}{dT}. \tag{11}$$

Durch weitere Differentiation von Formel (10) erhält man auch noch die spezifische Wärme bei konstantem Volumen

$$C_v = \frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT}\left(T^2\frac{d\Psi}{dT}\right).$$

Praktischer für die tatsächliche Berechnung erweist sich die Umformung

$$C_v = \frac{1}{T^2}\frac{d^2\Psi}{\left(d\frac{1}{T}\right)^2}. \tag{12a}$$

Mittels der Beziehung (zweiter Hauptsatz)

$$\frac{dE}{dT} = T\frac{dS}{dT}$$

kann man die in Betracht kommende spezifische Wärme vermöge (11) auch nach der Formel berechnen

$$C_v = T\frac{d^2(T\Psi)}{dT^2}. \tag{12b}$$

Auch diese Formel wird bei der numerischen Berechnung der spezifischen Wärme gute Dienste leisten können. Die Kenntnis der charakteristischen Funktion Ψ nach Gleichung (9) genügt somit, um durch einfache Operationen vermöge der Gleichungen (10), (11) und (12) die Größen E, S und C_v daraus herzuleiten.

Die ausgezeichneten Energiebeträge ε_n pflegen quantentheoretisch durch eine Anzahl ganzer

1) Massieu, C. R. **69**, 859, 1869. Paris.

Zahlen, und zwar bei s Freiheitsgraden durch s ganze Zahlen

$$n_1, n_2, n_3, \ldots . n_s$$

bestimmt zu sein, deren jede alle ganzzahligen Werte von Null bis Unendlich annehmen kann. Jede der unabhängigen Koordinaten q_i, welche den Zustand eines Elements des betrachteten Systems bestimmt, soll zusammen mit der zugehörigen Geschwindigkeit $\dot{q}_i$, bzw. dem Momente p_i, in unserer Bezeichnungsweise als ein Freiheitsgrad zählen. Die ausgezeichneten Energiewerte schreiben sich also bei Andeutung ihrer funktionellen Abhängigkeit

$$\varepsilon_n = \varepsilon(n_1, n_2, n_3, \ldots n_s). \qquad (13)$$

Ein wichtiger Fall ist der, daß die ausgezeichneten Energiewerte ε_n sich darstellen lassen als Summe von s-Funktionen, deren jede nur von je einer der s ganzen Zahlen abhängig ist, nämlich

$$\varepsilon(n_1, n_2, n_3, \ldots n_s) = \overset{(1)}{\varepsilon}(n_1) + \overset{(2)}{\varepsilon}(n_2) + \overset{(3)}{\varepsilon}(n_3) + \ldots + \overset{(s)}{\varepsilon}(n_s).$$

Wir wollen in diesem Falle sagen, das Element besitze s getrennte Freiheitsgrade. Für Systeme, welche aus solchen Elementen bestehen, schreibt sich die charakteristische Funktion

$$\Psi = Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\overset{(1)}{\varepsilon}(n_1) + \overset{(2)}{\varepsilon}(n_2) + \ldots + \overset{(s)}{\varepsilon}(n_s)}{kT}} =$$

$$= Nk \ln \left[\left(\Sigma e^{-\frac{\overset{(1)}{\varepsilon}(n_1)}{kT}} \right) \left(\Sigma e^{-\frac{\overset{(2)}{\varepsilon}(n_2)}{kT}} \right) \ldots \left(\Sigma e^{-\frac{\overset{(s)}{\varepsilon}(n_s)}{kT}} \right) \right] =$$

$$= Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\overset{(1)}{\varepsilon}(n_1)}{kT}} + Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\overset{(2)}{\varepsilon}(n_2)}{kT}} + \ldots$$

$$\ldots + Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\overset{(s)}{\varepsilon}(n_s)}{kT}}.$$

Bezeichnet man also mit

$$\Psi^{(i)} = Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\overset{(i)}{\varepsilon}(n_i)}{kT}}$$

die charakteristische Funktion des $i$ten Freiheitsgrades, so schreibt sich die erhaltene Relation einfach

$$\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} + \ldots . + \Psi^{(s)}. \qquad (14)$$

Für Systeme, die aus Elementen mit lauter getrennten Freiheitsgraden bestehen, ist die charakteristische Funktion somit gleich der Summe aus den charakteristischen Funktionen der einzelnen Freiheitsgrade. Nachdem die Größen E, S und C_v mit Ψ einfach durch lineare Differentialgleichungen verknüpft sind, gilt dieses additive Gesetz analog auch für die Gesamtenergie, die Entropie und die berechnete spezifische Wärme. Die Erfahrung lehrt, daß man es praktisch fast immer mit diesem ausgezeichneten Falle zu tun hat.

§ 2.

Nunmehr müssen wir unser Augenmerk auch dem Energieaustausch zuwenden. Aus der Grundvoraussetzung, daß die einzelnen Elemente nur eine abzählbare Menge von Zuständen mit ganz bestimmten diskreten Energiewerten annehmen können, folgt auch notwendigerweise, daß der Energieaustausch im allgemeinen nur in endlichen Quanten sich vollziehen kann. Wir wollen den Übergang der Energie zwischen zwei Systemen einer allgemeinen Betrachtung unterziehen, ohne aber den Fall dabei ausschließen zu wollen, daß das zweite System allenfalls mit dem ersten identisch ist, wobei dann der Energieaustausch nur zwischen verschiedenen Elementen des gleichen Systems erfolgt. Greifen wir irgend zwei Zustände der Elemente des ersten Systems Z_{m_1}' und Z_{n_1}' heraus und sei für die zugehörigen Energien

$$\varepsilon_{m_1}' > \varepsilon_{n_1}',$$

so bedeutet die Zustandsänderung $Z_{m_1}' \to Z_{n_1}'$ Energieabgabe, dagegen die umgekehrte Zustandsänderung $Z_{m_1}' \leftarrow Z_{n_1}'$ Energieaufnahme. Sind Z_{m_2}'' und Z_{n_2}'' analog zwei Zustände der Elemente des zweiten Systems und gilt für die zugehörigen Energien entsprechend

$$\varepsilon_{m_2}'' > \varepsilon_{n_2}'',$$

so bedeutet auch hier die Zustandsänderung $Z_{m_2}'' \leftarrow Z_{n_2}''$ Energieaufnahme und die umgekehrte Zustandsänderung $Z_{m_2}'' \to Z_{n_2}''$ Energieabgabe. Der Energieaustausch zwischen den beiden Systemen kann nur dann in dem Prozeß

$$Z_{m_1}' \to Z_{n_1}',\ Z_{m_2}'' \leftarrow Z_{n_2}'' \qquad (15a)$$

oder dem gerade entgegengesetzten

$$Z_{m_1}' \leftarrow Z_{n_1}',\ Z_{m_2}'' \to Z_{n_2}'' \qquad (15b)$$

bestehen, wenn die Beziehung

$$\varepsilon_{m_1}' - \varepsilon_{n_1}' = \varepsilon_{m_2}'' - \varepsilon_{n_2}'' \qquad (16)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist notwendig und Systeme, für welche diese Beziehung nirgends erfüllt ist, können überhaupt nicht in Energieaustausch miteinander treten.

Offenbar muß auch die folgende Bedingung befriedigt sein: Systeme, die jedes für sich im thermodynamischen Gleichgewichtszustande sich befinden, dürfen, bei gleicher Temperatur in Energieaustausch miteinander gebracht, in ihren Verteilungszuständen einander nicht stören. Dieser Bedingung genügt man auf die einfachste Weise durch die folgenden weiteren Voraussetzungen: Die Wahrscheinlichkeit des Übergangs eines Elements aus dem Zustande Z_m in den Zustand Z_n ist ebenso groß wie die Wahrscheinlichkeit des Übergangs aus dem Zustande

Z_n in den Zustand Z_m. Dies ist die quantentheoretische Erweiterung des in der Strahlungstheorie so bewährten Satzes[1]), welcher zum Kirchhoffschen Gesetz führt. Dementsprechend soll für das erste System mit w' die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet werden, daß ein Element aus dem Zustand Z_{m_1}' in den Zustand Z_{n_1}' überspringt oder umgekehrt aus dem Zustand Z_{n_1}' in den Zustand Z_{m_1}'. Für das zweite System bedeute analog w'' die Wahrscheinlichkeit, daß ein Element aus dem Zustand Z_{m_2}'' in den Zustand Z_{n_2}'' übergeht oder aus dem Zustand Z_{n_2}'' in den Zustand Z_{m_2}''. Die Häufigkeit A des Prozesses (15a) wird aber auch noch proportional sein der Anzahl der Elemente, die sich in jedem der in Betracht kommenden Ausgangszustände befinden, nämlich der Anzahl N_{m_1}' der Elemente des ersten Systems im Zustande Z_{m_1}' und der Anzahl N_{n_2}'', der Elemente des zweiten Systems im Zustande Z_n''. Man hat also zu setzen

$$A = \varkappa w' w'' N_{m_1}' N_{n_2}'',$$

wenn wir mit $\varkappa$ die Proportionalitätskonstante bezeichnen, die um so größer sein wird, je leichter die beiden Systeme untereinander Energie austauschen können. Man wird die Konstante $\varkappa$ sinngemäß als Koppelungskoeffizient bezeichnen können. Ganz ebenso ist die Häufigkeit B des Prozesses (15b) noch proportional der Anzahl der Elemente, die sich hier in den in Betracht kommenden Anfangszuständen befinden, der Anzahl N_{n_1}' der Elemente im Zustande Z_{n_1}' und der Anzahl N_{m_2}'' der Elemente im Zustande Z_{m_2}''. Die analoge Formel lautet

$$B = \varkappa w' w'' N_{n_1}' N_{m_2}''.$$

Der Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ ist der ihm zugeschriebenen physikalischen Bedeutung gemäß der gleiche wie oben.

Im thermodynamischen Gleichgewichtszustande hat man den Gleichungen (4) und (7) gemäß bei der Temperatur T für das erste System die Beziehung

$$\frac{N_{m_1}'}{N_{n_1}'} = e^{-\frac{\varepsilon_{m_1}' - \varepsilon_{n_1}'}{kT}}$$

und für das zweite System analog

$$\frac{N_{m_2}''}{N_{n_2}''} = e^{-\frac{\varepsilon_{m_2}'' - \varepsilon_{n_2}''}{kT}}.$$

Man folgert somit für die oben betrachteten Zustände gemäß (16) die Gleichung

$$\frac{N_{m_1}'}{N_{n_1}'} = \frac{N_{m_2}''}{N_{n_2}''}$$

als Beziehung zwischen den beiden Systemen bei Temperaturgleichheit. Daraus läßt sich weiter folgern

$$N_{m_1}' N_{n_2}'' = N_{n_1}' N_{m_2}''$$

und schließlich

$$A = B.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen stehen also die beiden Systeme bei Temperaturgleichheit auch im Gleichgewichte des Energieaustausches.

Ist umgekehrt von den beiden Systemen bekannt, daß sie im Gleichgewichte des Energieaustausches sich befinden, d. h. daß für jede Art von Energieübergang die Beziehung

$$A = B$$

besteht, und weiß man ferner vom ersten der beiden Systeme, daß es sich im Temperaturgleichgewichte befindet und demgemäß der Beziehung genügt

$$\frac{N_{m_1}'}{N_{n_1}'} = e^{-\frac{\varepsilon_{m_1}' - \varepsilon_{n_1}'}{kT}},$$

so liefern die gemachten Voraussetzungen auch für das zweite System in ganz analoger Weise die Beziehung

$$\frac{N_{m_2}''}{N_{n_2}''} = e^{-\frac{\varepsilon_{m_2}'' - \varepsilon_{n_2}''}{kT}};$$

es folgt also auch für das zweite System der thermodynamische Gleichgewichtszustand, und zwar bei der nämlichen Temperatur. Auf diese Weise ist es verständlich, wie Systeme, welche für sich abgeschlossen nicht dem Zusande maximaler Entropie zustreben, beim Zusammenwirken mit anderen Systemen dennoch thermodynamisches Gleichgewicht aufweisen. Die Energieverteilung der Hohlraumstrahlung liefert hierfür ein bekanntes Beispiel[1]), doch sind dazu vorher noch andere Betrachtungen nötig, die erst später durchgeführt werden sollen.

§ 3.

Die erhaltenen Formeln sollen zunächst auf den Fall des einfach periodischen geradlinigen Oszillators[2]) angewendet werden. Ist μ seine Masse, ω die Frequenz und q die Elongation, so lautet die Formel für die Energie

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2).$$

Die Bewegung ist also durch die Formel gegeben

$$q = a \sin \omega (t - t_0)$$

1) Planck, Theorie der Wärmestrahlung, S. 23. Leipzig 1906.

1) Debye, Ann. d. Phys. (4) **33**, 1427, 1910.
2) Planck, Ann. d. Phys. (4) **50**, 390, 1916.

und stellt somit eine einfach harmonische Schwingung dar. Die Amplitude a ist hier jene Integrationskonstante, welche der Quantentheorie zufolge nur bestimmte diskrete Werte annehmen kann. Diese werden durch den einfachen Ansatz bestimmt[1])

$$\int p\,dq = nh\,, \qquad (17)$$

wobei die Integration über eine ganze Periode zu erstrecken ist. Man findet somit

$$\int p\,dq = \mu \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} \dot{q}^2\,dt = \frac{\mu a^2 \omega}{2} \cdot 2\pi\,.$$

Die ausgezeichneten Zustände sind also durch die Gleichung

$$\frac{\mu a_n^2 \omega}{2} = n\,\frac{h}{2\pi}$$

definiert, worin n alle ganzzahligen Werte von Null bis Unendlich annehmen kann. Für die Energie des Oszillators hat man die einfache Formel

$$\varepsilon = \frac{\mu a^2 \omega^2}{2}.$$

Die den ausgezeichneten Zuständen zukommenden Energiewerte sind demnach

$$\varepsilon_n = \frac{\mu a_n^2 \omega^2}{2} = n\,\frac{h\omega}{2\pi}.$$

Da

$$\frac{\omega}{2\pi} = \nu$$

die Schwingungszahl des Oszillators ist, so hat man schließlich

$$\varepsilon_n = nh\nu\,. \qquad (18)$$

Wir sind nunmehr in der Lage, sogleich die charakteristische Funktion pro Oszillator zu berechnen. Nach Formel (9) erhält man für $N = 1$ zufolge (18)

$$\Psi = k\,ln \sum e^{-n\frac{h\nu}{kT}}.$$

Wir gebrauchen vorübergehend die Bezeichnung

$$e^{-\frac{h\nu}{kT}} = \gamma$$

und es ist

$$\gamma < 1\,,$$

wie man sieht. Es läßt sich weiter schreiben

$$\Psi = k\,ln \sum \gamma^n = k\,ln \frac{1}{1-\gamma}.$$

Die charakteristische Funktion des Oszillators ist also durch die einfache Formel gegeben

$$\Psi = -k\,ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right), \qquad (19)$$

1) Sommerfeld, Ann. d. Phys. (4) 51, 9, 1916.

und daraus erhält man mittels der Formeln (10), (11) und (12) auch ohne weiters die Ausdrücke für Energie, Entropie und spezifische Wärme pro Oszillator. Wir wollen uns mit der Berechnung der Energie begnügen; dann hat man nach Gleichung (10) zu bilden

$$\frac{E}{T^2} = \frac{d\Psi}{dT} = \frac{\frac{h\nu}{T^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Daraus folgt die bekannte Formel[1]):

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (20)$$

für die Energie des Oszillators.

Beim Überspringen des Oszillators aus einem Zustande in den nächstbenachbarten Zustand wird gemäß (18) die Energiemenge

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = h\nu$$

aufgenommen bzw. abgegeben. Dieser Energiebetrag erweist sich für den einfach-periodischen geradlinigen Oszillator als völlig unabhängig von der Ordnungszahl n; er hat für irgend zwei benachbarte Zustände immer genau den gleichen Wert. Durch diese Eigenschaft ist der hier betrachtete Oszillator besonders ausgezeichnet.

Erfolgt der schrittweise Übergang des Oszillators nicht nur zwischen zwei Zuständen, deren Ordnungszahl bloß um eine Einheit verschieden ist, sondern allenfalls um i-Einheiten, so wird der Energiebetrag

$$\varepsilon_{n+i} - \varepsilon_n = i \cdot h\nu$$

aufgenommen bzw. abgegeben. Ein anderer solcher Oszillator von der Schwingungszahl ν' könnte analog die Energiebeträge

$$\varepsilon'_{n'+i'} - \varepsilon'_{n'} = i' \cdot h\nu'$$

abgeben bzw. aufnehmen. Die beiden Oszillatoren könnten miteinander in Energieaustausch treten, wenn gemäß (16) die Beziehung

$$i\nu = i'\nu'$$

erfüllt ist. Die Möglichkeit für den Energieaustausch wäre demnach immer für Oszillatoren gegeben, deren Schwingungszahlen in rationalem Verhältnis stehen. Erfahrungsgemäß treten aber einfach periodische Oszillatoren nur dann in Energieaustausch oder es findet, wie man sagt, Resonanz statt, wenn ihre Schwingungszahlen gleich sind. Daraus muß man schließen, daß die einfach periodischen Oszillatoren offenbar weiterhin auch dadurch ausgezeichnet sind, daß sie aus jedem ihrer ausgezeichneten Zustände nur in einen der beiden Nachbarzustände schritt-

1) Planck, Theorie der Wärmestrahlung, S. 157, Leipzig 1906.

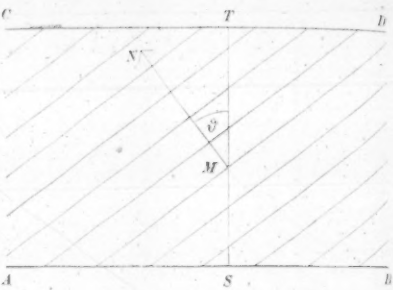
weise überzuspringen imstande sind. Die betrachteten Wahrscheinlichkeiten w sind hier wohl nur für Übergänge zwischen Nachbarzuständen von Null verschieden anzunehmen und offenbar unabhängig von der Ordnungszahl gleich einer Konstanten zu setzen, für Übergänge zwischen nicht benachbarten Zuständen dagegen muß w gleich Null sein. Unter dieser Voraussetzung kann der Oszillator von der Schwingungszahl r die Energie nur in Quanten von der Größe hr austauschen, der Oszillator von der Schwingungszahl r' nur in Quanten von der Größe hr'; Energieaustausch zwischen beiden ist demnach nur für $r = r'$ möglich, wie es die Erfahrung verlangt. Bei anderen als rein periodischen Oszillatoren scheint aber der unmittelbare Übergang nicht bloß auf benachbarte Zustände beschränkt zu sein.

§ 4.

Die linearen einfach periodischen Oszillatoren haben große Bedeutung gewonnen bei Betrachtung des Energieinhaltes fester Körper. Die Gesamtenergie der Eigenschwingungen eines Körpers setzt sich als Summe aus den Energien der Einzelschwingungen zusammen, deren jede einzelne man einem linearen einfach periodischen Oszillator zuschreibt, der die Rolle eines getrennten Freiheitsgrades spielt. Dies ist die Grundlage der Theorie der spezifischen Wärme fester Körper, welche die Gesamtenergie als in den Eigenschwingungen aufgespeichert betrachtet. Jeder Eigenschwingung von der Schwingungszahl r kommt im thermodynamischen Gleichgewichtszustande der Energiebetrag (20) zu und die Summe dieser Ausdrücke für alle getrennten Eigenschwingungen ist nach der Theorie die Gesamtenergie des festen Körpers.

Da man die innere Energie eines festen Körpers als von seiner geometrischen Form unabhängig ansehen muß, zur Bestimmung der Eigenschwingungen aber das Ausgehen von einer bestimmten Gestalt erforderlich ist, geht man gewöhnlich von der hierfür am geeignetst erscheinenden Form aus. Rayleigh[1]) hat in dieser Hinsicht den Würfel eingeführt. Man hat demnach alle möglichen stehenden Wellen im Würfel abzuzählen.

In nebenstehender Figur ist ein Wellenzug gezeichnet, der zwischen zwei parallelen Wänden AB und CD verläuft. MN ist die Wellennormale, welche mit dem Perpendikel auf die Wände ST den Winkel ϑ einschließt. Soll dieser Wellenzug an der Ausbildung stehender Wellen beteiligt sein, so ist jedenfalls notwendig, daß an irgend zwei senkrecht gegenüberliegen-



den Stellen S und T der beiden Wände genau die gleiche oder gerade entgegengesetzte Phase herrscht. Nun schneiden aber zwei Wellenebenen, die eine halbe Wellenlänge λ voneinander entfernt sind, auf dem Perpendikel ST die Strecke

$$\frac{\lambda}{2} \frac{1}{\cos \vartheta}$$

ab, wie ein Blick auf die Zeichnung sofort erkennen läßt. Bezeichnen wir die Distanz der Wände mit l, in der Zeichnung

$$\overline{ST} = l,$$

so ist notwendig

$$\frac{\lambda}{2} \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{l}{n}, \qquad (21)$$

worin n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Zur Ausbildung der stehenden Welle ist ferner die Mitwirkung der reflektierten Welle und der entgegengesetzt laufenden Wellen erforderlich. Die Zahl der Wellenzüge eines Quadranten bezüglich des Winkels ϑ,

$$0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

welche die obige Bedingungsgleichung (21) erfüllen, gibt bereits die Anzahl der möglichen stehenden Wellen.

Beim Würfel hat man drei Paare solcher paralleler Wände mit Abständen gleich der Würfelkante l. Sie stehen gegenseitig alle aufeinander senkrecht. Für jedes Paar gegenüberliegender Wände gilt dann die obige Relation (21), da auch die Reflexionen an den übrigen Wänden jeweils an dieser Bedingung nichts ändern. Die stehende Wellenbewegung im Würfel, welche in den drei zueinander senkrechten Kantenrichtungen eine Anzahl n_1, n_2 und n_3 von Knoten oder Bäuchen aufweist, ist somit dem Wellenzuge zugeordnet, dessen Normale mit den drei Kantenrichtungen solche

1) Phil. Mag. (5) **49**, 539, 1900.

Winkel ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3 einschließt, welche den Formeln genügen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lambda}{2}n_1 &= l\cos\vartheta_1\\ \frac{\lambda}{2}n_2 &= l\cos\vartheta_2\\ \frac{\lambda}{2}n_3 &= l\cos\vartheta_3\end{aligned}\right| \qquad (21')$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser drei Gleichungen folgt für die ganzen Zahlen n_1, n_2 und n_3 somit als notwendige Bedingung die Beziehung

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2(n_1^2+n_2^2+n_3^2)=l^2,$$

welche nur von bestimmten Werten der Wellenlänge λ erfüllt ist. Mit Hilfe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v führen wir noch statt der Wellenlänge λ die Schwingungszahl r ein und erhalten

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=\left(\frac{2l}{v}r\right)^2. \qquad (22)$$

Die Abzählung der Anzahl von Schwingungen, welche in das Intervall r bis $r+dr$ hineinfällt, erfolgt weiter in der bekannten Weise[1]): Man denkt sich die Punkte $x=n_1$, $y=n_2$, $z=n_3$ für alle positiven ganzen Zahlen n_1, n_2 und n_3 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingezeichnet. Diese bilden ein kubisches Raumgitter, welches den einen Oktanten des Koordinatensystems erfüllt. Jeder Gitterpunkt bestimmt durch seinen Radiusvektor nach Gleichungssystem (21') zunächst einmal die Richtung eines ausgezeichneten Wellenzuges. Der Betrag R des Radiusvektors muß ferner nach (22) die Beziehung erfüllen

$$R=\frac{2l}{v}r$$

und bestimmt mithin die Schwingungszahl. Die Gitterpunkte mit den Radien

$$\frac{2l}{v}r<R<\frac{2l}{v}(r+dr) \qquad (23)$$

entsprechen demnach allen Eigenschwingungen mit den Schwingungszahlen r bis $r+dr$. In einem kubischen Raumgitter von der betrachteten Art ist ferner die Zahl der Gitterpunkte gleich der Zahl der Elementarwürfel. Im vorliegenden Falle, wo der Elementarwürfel das Volumen 1 besitzt, ist die in einem genügend großen Volumen enthaltene Anzahl von Gitterpunkten somit gleich dem Betrage dieses Volumens. Der Rauminhalt des Kugelschalenoktanten, welcher durch die Ungleichung (23) definiert ist, liefert demnach die Zahl der Eigenschwingungen zwischen r und $r+dr$, für welche man somit erhält

$$\frac{1}{8}4\pi\left(\frac{2l}{v}r\right)^2\frac{2l}{v}dr=\frac{4\pi l^3}{v^3}r^2dr.$$

Sie ist dem Volumen des Würfels l^3 einfach proportional; daher ist die Zahl der Schwingungen pro Volumseinheit

$$dZ=\frac{4\pi r^2dr}{v^3} \qquad (24)$$

von den Lineardimensionen des Ausgangskörpers ganz unabhängig. Wenn man die Eigenschwingungen eines Parallelepipedes statt eines Würfels betrachtet, wird der Gang der Rechnungen nur ganz unwesentlich modifiziert und für die Zahl der Schwingungen[1]) pro Volumseinheit erhält man wieder die Formel (24); man kann somit voraussetzen, daß die Zahl der Eigenschwingungen pro Volumseinheit für genügend große Werte von r auch von der Form des Körpers nicht abhängt, wie es vom Standpunkt der Theorie der spezifischen Wärme zu erwarten ist.

In einem isotropen festen Körper treten neben Longitudinalwellen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_1 noch Transversalwellen mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_0 auf. Jede transversale Welle läßt sich außerdem in zwei getrennte senkrecht zueinander schwingende Wellenzüge zerlegen. Sowohl für die Longitudinalwellen als auch für beide Transversalwellen gilt die obige Abzählungsformel für sich. Die Gesamtzahl der Eigenschwingungen pro Volumseinheit eines isotropen festen Körpers ist somit durch die Formel[2])

$$dZ=4\pi\left(\frac{2}{v_0^3}+\frac{1}{v_1^3}\right)r^2dr \qquad (25)$$

gegeben. Dieser Ausdruck wurde zuerst von Debye[3]) bei Aufstellung seiner Theorie der spezifischen Wärme entwickelt, und zwar durch strenge Behandlung des Problems der elastischen Eigenschwingungen einer Kugel. Die Zahl der Eigenschwingungen eines materiellen Körpers kann aber nicht größer sein als die Zahl der Freiheitsgrade seiner Atome, sondern kann höchstens vom gleichen Betrage sein. Ist N_0 die Anzahl der Atome pro Volumseinheit, so sind also bloß

1) Rayleigh, Phil. Mag. (5) **49**, 540, 1900.

1) Lorentz, Verh. d. Conseil Solvay 1911, Abh. d. Deutsch. Bunsen-Ges. f. angew. phys. Chemie Nr. 7, S. 12. Halle a. S. 1914; W. Wien, Vorl. üb. neuere Probleme d. theor. Physik, S. 13. Teubner 1913.

2) Eucken, Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913, Abh. d. Deutsch. Bunsen-Ges. f. angew. phys. Chemie Nr. 7, S. 377. Halle a. S. 1914.

3) Ann. d. Phys. (4) **39**, 789, 1912.

$$Z = 3N_0$$

Eigenschwingungen zu erwarten. Über r von o bis ∞ integriert, würde (25) aber eine unendliche Zahl von Eigenschwingungen liefern. Darum setzt Debye voraus, daß die Eigenschwingungen bei einer bestimmten oberen Grenze r_m aufhören, welche sich aus der Gleichung

$$3N_0 = 4\pi \int_0^{r_m} \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} \right) r^2 dr \qquad (26)$$

berechnet. Für die Energiedichte des isotropen festen Körpers erhält man zufolge von (20)

$$\frac{E}{V} = 4\pi h \int_0^{r_m} \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} \right) \frac{r^3 dr}{e^{\frac{hr}{kT}} - 1}. \qquad (27)$$

Debye vereinfacht die Formeln noch weiter, indem er von der Dispersion absieht, so daß auf der rechten Seite von (26) und (27) der Klammerausdruck als Konstante vor das Integralzeichen tritt. Für genügend niedrige Werte der absoluten Temperatur kann man weiter mit hinreichender Näherung

$$\frac{E}{V} = 4\pi h \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} \right) \int_0^{\infty} \frac{r^3 dr}{e^{\frac{hr}{kT}} - 1}$$

setzen, da dann die e-Potenz im Nenner mit wachsendem r sehr rasch über alle Grenzen wächst, so daß das Integral von r_m bis ∞ keinen beträchtlichen Beitrag mehr liefert. Vermittels des bestimmten Integrals[1])

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

erhält man für den vereinfachten Ausdruck der Energiedichte schließlich

$$\frac{E}{V} = \frac{4\pi^5}{15} \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} \right) \frac{k^4 T^4}{h^3}. \qquad (28)$$

Für Temperaturen, die hoch genug sind, daß man mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\frac{1}{e^{\frac{hr}{kT}} - 1} = \frac{kT}{hr}$$

approximieren kann, liefern die Formeln (26) und (27) als anderen Grenzfall den Ausdruck

$$\frac{E}{V} = 3N_0 kT,$$

also das Dulong- und Petitsche Gesetz. Tatsächlich wird durch die Ausdrücke Debyes der Temperaturverlauf der spezifischen Wärme für viele Fälle mit guter Annäherung wiedergegeben. Bei strengerer Behandlung hat man das Schwingungsspektrum eines Punktgitters, welches ein fester Körper in seinem atomistischen Aufbau darstellt, der Rechnung zugrunde zu legen. Dies wird tatsächlich durchgeführt in der Theorie der spezifischen Wärme von Born und Kármán[1]), welche von Thirring[2]) mit Erfolg weiter ausgebaut wurde.

1) Debye, Ann. d. Phys. (4) **39**, 800, 1912.

§ 5.

Auf einen Fall lassen sich die Betrachtungen Debyes mit voller Strenge anwenden; es sind dies die elektromagnetischen Schwingungen des freien Äthers oder Vakuums. Longitudinalwellen gibt es im Äther (Vakuum) nicht, und man hat dort

$$\frac{1}{v_1^3} = 0$$

zu setzen. Die transversalen Wellen zeigen keine Dispersion im Äther (Vakuum), sondern pflanzen sich mit der universellen Lichtgeschwindigkeit

$$v_0 = c$$

fort. Der Klammerausdruck im Integranden reduziert sich somit; man erhält

$$\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} = \frac{2}{c^3} \qquad (29)$$

und kann diesen Faktor als Konstante mit voller Strenge vor das Integralzeichen setzen. Für den Äther (Vakuum) als Kontinuum[3]) gibt es keine solche Beschränkung der Zahl der Freiheitsgrade, wie es nach (26) für den festen Körper angenommen werden mußte, sondern die Integration im Ausdruck für die Energiedichte (27) ist immer bis ins Unendliche zu erstrecken, so daß Formel (28) strenge für jede Temperatur gültig ist. Man erhält auf diese Weise die Formel für die Dichte μ der Hohlraumstrahlung im Falle thermodynamischen Gleichgewichts durch bloßes Einsetzen des Ausdrucks (29) in Gleichung (28) zu

$$\mu = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4, \qquad (30)$$

worin das Stefan-Boltzmannsche Gesetz enthalten ist. Für den Äther (Vakuum) ist die Zahl der Eigenschwingungen pro Volumseinheit zwischen den Grenzen r und $r + dr$ gemäß (25) und (29)

$$dZ = \frac{8\pi r^2 dr}{c^3} \qquad (31)$$

1) Diese Zeitschr. **13**, 297, 1912; **14**, 15, 1913.
2) Diese Zeitschr. **15**, 127 u. 180, 1914.
3) Witte, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **7**, 212, 1910.

und die Energiedichte für die Schwingungen dieses Intervalls im thermodynamischen Gleichgewichtszustande demnach

$$\mu_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \qquad (32)$$

der bekannte Ausdruck Plancks[1]) für die spektrale Energieverteilung der Hohlraumstrahlung. Die gute Übereinstimmung dieser Formel mit der Erfahrung[2]) spricht schon sehr für die Richtigkeit der für den Äther (Vakuum) zu bildenden Vorstellung, wonach sein elektromagnetisches Verhalten einer Mannigfaltigkeit von einfach periodischen geradlinigen Oszillatoren zugeschrieben werden kann, deren Zahl pro Volumseinheit für eine Schwingungszahl zwischen ν und $\nu + d\nu$ durch Formel (31) gegeben ist. Nunmehr hat noch außerdem vor kurzem Rubinowicz[3]) zeigen können, daß dies sich auch mit voller Strenge auf Grund jener schärferen Fassung der Quantenhypothese beweisen läßt, die im Falle mehrerer Freiheitsgrade den Sommerfeldschen Quantenansatz für diejenigen kanonischen Variabeln vorschreibt, welche die zugehörige Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung durch Separation der Variabeln zu integrieren gestattet[4]).

Strahlungs-Emission und -Absorption kann zufolge der entwickelten Vorstellungen in nichts anderem bestehen, als dem Energieaustausch zwischen Materie und den einfach periodischen Oszillatoren des Äthers (Vakuums), die, wie alle rein periodischen Oszillatoren, die Energie nicht anders als in Quanten von der Größe $h\nu$ abgeben oder aufnehmen können. Daraus folgt unmittelbar der bekannte Satz[5]) der Strahlungstheorie: Strahlende Energie von der Schwingungszahl ν kann von den ponderabeln Körpern aufgenommen oder ausgestrahlt werden nur in Quanten von der Größe $h\nu$. Da die Materie im allgemeinen andere Oszillatoren enthält als rein periodische, ist sie ferner imstande, Strahlungsenergie einer Schwingungszahl durch Absorption und Wiederemission in solche anderer Schwingungszahl überzuführen.

Ein Element der Materie, welches Strahlung von der Schwingungszahl ν aussendet und dabei seine Energie von ε_m auf ε_n vermindert, überträgt nach den entwickelten Vorstellungen die abgegebene Energie einem linearen einfach periodischen Oszillator des Äthers (Vakuums) von der Schwingungszahl ν. Es muß demnach zufolge (16) in Verknüpfung mit den für die idealen einfach periodischen Oszillatoren gefolgerten Eigenschaften die Beziehung bestehen

$$\varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu. \qquad (33)$$

Dies ist aber nichts anderes als die bekannte „Bohrsche Frequenzbedingung“[1]), welche in der Theorie der Serienspektra sich so glänzend bewährt hat. Die in jüngster Zeit in Angriff genommenen Intensitätsfragen bei den Spektrallinien[2]) dürften in engster Weise mit der betrachteten Wahrscheinlichkeit w von Zustandsänderungen in Zusammenhang stehen.

Die elektromagnetische Energie breitet sich im Äther (Vakuum) in ungedämpften Wellen fort. Angenähert ebenso verhalten sich noch die langsamen Schwingungen in der Materie, welche sich als elastische Wellen fortpflanzen. Aber die raschen Schwingungen, welche den maßgebenden Teil der Wärmeenergie des Körpers ausmachen, lassen von einer wellenartigen Ausbreitung im allgemeinen kaum mehr etwas erkennen. Man kann die Wärmeleitung durch Wellen von außerordentlich starker Absorption hervorgebracht sich vorstellen[3]) oder genauer gesagt, die Wärmeenergie in Wellen von rasch wechselnder Richtung und wechselnder Schwingungszahl fortgepflanzt sich denken. Es ist naheliegend, anzunehmen, daß nur die ideal einfach periodischen Oszillatoren, wie sie im Äther (Vakuum) ausschließlich vorzustellen sind, die Energie in ungedämpften Wellen fortpflanzen. Je mehr die Oszillatoren aber vom rein periodischen Idealfall abweichen, desto weniger regelmäßig scheint sich der Energieaustausch zu gestalten, was in der Dämpfung der Wellen zum Ausdruck kommt. Vielleicht liefert die weitere Verfolgung dieser nur angedeuteten Gedanken den Weg zu einer quantentheoretischen Theorie der Energieausbreitung, wobei sich auch Betrachtungen über den Impuls nötig erweisen könnten, was von Einstein[4]) bereits ganz allgemein für die Quantentheorie gefordert wurde.

§ 6.

Eine weitere Anwendung unserer allgemeinen Formeln soll sich auf die spezifische Wärme

1) Theorie der Wärmestrahlung, S. 157. Leipzig 1906.
2) Eucken, Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913. Abh. d. Deutsch. Bunsen-Ges. f. angew. physik. Chemie **7**, 374. Halle a/S. 1914.
3) Diese Zeitschr. **18**, 96, 1917.
4) Epstein, Ann. d. Phys. (4) **50**, 489, 1916; Schwarzschild, Berl. Ber. S. 548, 1916.
5) Debye, Ann. d. Phys. (4) **33**, 1430, 1910.

1) Sommerfeld, Ann. d. Phys. (4) **51**, 14, 1916.
2) Sommerfeld, Münchner Ber. S. 83, 1917; Herzfeld, Ann. d. Phys. **51**, 261, 1916 u. diese Zeitschr. **18**, 389, 1917.
3) Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, Debye S. 19, Sommerfeld S. 125, 1914.
4) Diese Zeitschr. **18**, 121, 1917.

zweiatomiger Gase[1]) beziehen, und zwar wird es sich um den Beitrag $C_v^{(r)}$ zur spezifischen Wärme des Gases handeln, der von der Rotation der Moleküle herrührt und dessen Temperaturabhängigkeit durch Versuche von Eucken[2]) für Wasserstoff in seinem ganzen Verlaufe experimentell gezeigt worden ist. Wenn man unter K das Trägheitsmoment des Moleküls um eine zur Verbindungslinie der beiden Atome senkrechte Achse versteht und mit ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation bezeichnet, so schreibt sich die Rotationsenergie allgemein

$$\varepsilon = \frac{K\omega^2}{2}.$$

Wieder hat man die ausgezeichneten Zustände nach Quantenansatz (17) zu bestimmen. Wie bei mehreren kreisenden Elektronen die Quantenbedingung jedem einzelnen Elektron[3]) auferlegt werden muß, so hat dies konsequenterweise bei mehreren kreisenden Atomen ebenfalls für jedes einzelne der Atome[4]) zu geschehen. Im vorliegenden Falle ist $\dot{q} = \omega$, somit zunächst allgemein bei einer Anzahl $\varkappa$ gleicher Atome, welche im Moleküle kreisen, das Moment eines Atoms

$$p = \frac{1}{\varkappa} K\omega.$$

Die Umdrehung erfolgt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und die Koordinate $q = \varphi$, der Drehungswinkel, ist bei Integral (17) von o bis 2π zu erstrecken, so daß man die Bedingung

$$\frac{2\pi}{\varkappa} K\omega = nh$$

erhält. Die Drehgeschwindigkeit kann somit nur die ausgezeichneten Werte

$$\omega_n = n \frac{\varkappa h}{2\pi K}$$

annehmen, was für die Energie die zugehörigen Werte

$$\varepsilon_n = n^2 \frac{\varkappa^2 h^2}{8\pi^2 K} \qquad (34)$$

gibt.

Da die Rotation eines zweiatomigen Moleküls bezüglich einer zur Verbindungslinie der beiden Atome senkrechten Achse sich noch im allgemeinen in zwei Komponenten zerlegen läßt, welche als getrennte Freiheitsgrade betrachtet werden können, so muß für N-Atome der Ausdruck (9) für die charakteristische Funktion im vorliegenden Falle verdoppelt werden, so daß die auf die gesamte Rotationsenergie bezügliche Formel lautet

$$\Psi = 2Nkln\Sigma e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}.$$

Bei Einsetzen des Ausdruckes (34) empfiehlt es sich, mit Ehrenfest[1]) die Abkürzung

$$\sigma = \frac{\varkappa^2 h^2}{8\pi^2 K k T} \qquad (35)$$

einzuführen und die Bezeichnung

$$Q_{(\sigma)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2\sigma}$$

zu verwenden. Die charakteristische Funktion schreibt sich dann

$$\Psi = 2Nkln Q_{(\sigma)}$$

und für die in Betracht kommende spezifische Wärme läßt sich weiter gemäß Formel (12a) und unter Beachtung von (35)

$$C_v^{(r)} = \sigma^2 \frac{d^2\Psi}{d\sigma^2} \qquad (36)$$

folgern. Wie man die Berechnung von $Q_{(\sigma)}$ zufolge der Beziehung dieses Ausdrucks zu den Jacobischen Thetafunktionen praktisch am besten durchführt, wurde von Ehrenfest eingehend erörtert.

Bei Anschluß von $C_v^{(r)}$ an die Beobachtungen nach Formel (36) ist nur eine einzige Konstante verfügbar, nämlich die Größe

$$\sigma T = \frac{\varkappa^2 h^2}{8\pi^2 K k} = \Theta.$$

Ehrenfest[2]) findet, daß der Zahlenwert

$$\Theta = 570$$

für Wasserstoff die Messungen Euckens bei tiefen Temperaturen am besten darstellt. Man kann daraus das Trägheitsmoment K des Wasserstoffmoleküls nach der Formel

$$K = \frac{\varkappa^2 h^2}{8\pi^2 k\Theta} \qquad (37)$$

bestimmen. Mit den Werten[3])

$$h = 6{,}545 \cdot 10^{-27}$$
$$k = 1{,}3723 \cdot 10^{-16}$$

erhält man für $\varkappa = 2$ (zweiatomiges Molekül) die Zahl

$$K = 2{,}77 \cdot 10^{-41} \qquad (37')$$

1) Ehrenfest, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 451, 1913.
2) Berl. Ber. S. 141, 1912.
3) Bohr, Phil. Mag. (6) **26**, 24, 1913; Debye, Münchner Ber. S. 3, 1915.
4) Epstein, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **18**, 400, 1916.

1) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 455, 1913.
2) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 456, 1913.
3) Flamm, diese Zeitschr. **18**, 515, 1917.

als Trägheitsmoment des Wasserstoffmoleküls. Ehrenfest rechnet unzulässigerweise mit $\varkappa = 1$ und erhält darum nur den viermal so kleinen Wert $0{,}69 \cdot 10^{-41}$[1]).

Andererseits kann man das Trägheitsmoment des Wasserstoffmoleküls aus dem Bohrschen Modell berechnen, welches sich in der Dispersionstheorie Debyes[2]) so glänzend bewährt hat. Demnach ist im Wasserstoffmolekül[3]) der Abstand jedes der beiden Atome vom gemeinsamen Schwerpunkte

$$b = \frac{1}{9 - \sqrt{3}} \frac{1}{m} \left(\frac{h}{\pi e}\right)^2,$$

wobei e und m Ladung und Masse eines Elektrons bedeuten. Bezeichnet man die Masse eines Wasserstoffkernes mit m_1, so schreibt sich das Trägheitsmoment des Wasserstoffmoleküls

$$K = 2 m_1 b^2$$

und seine Berechnung kann nach der Formel

$$K = \frac{1}{3(14 - 3\sqrt{3})} \frac{m_1}{m} \frac{e}{m} \frac{1}{e} \left(\frac{h}{\pi e}\right)^4 \qquad (38)$$

durchgeführt werden. Wenn man für die neu hinzutretenden Konstanten[4]) die Werte

$$\frac{m_1}{m} = 1845 \cdot 9$$

$$\frac{e}{m} = 5{,}304 \cdot 10^{17}$$

$$e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$$

wählt, so erhält man

$$K = 2{,}82 \cdot 10^{-41}.$$

Dieser Zahlenwert stimmt mit dem obigen (37') auf etwa 2 Proz. überein, so daß wir darin in den Genauigkeitsgrenzen der bei den tieferen Temperaturen gemessenen spezifischen Wärmen eine glänzende Bestätigung der Theorien zu erblicken haben. Man wird umgekehrt den Wert der für die betrachtete spezifische Wärme maßgebenden Konstanten Θ sicherer nach dem Bohrschen Molekülmodell berechnen, indem man die Gleichungen (37) und (38) nach dieser Größe auflöst. Es empfiehlt sich dabei, der Abkürzung halber die Rydbergsche Konstante[5])

$$N_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3}$$

und die Exponentialkonstante des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes

$$c_2 = \frac{ch}{k}$$

zu verwenden; man erhält dann

$$\Theta = \frac{3(14 - 3\sqrt{3})}{4} \frac{m}{m_1} c_2 N_\infty \qquad (39)$$

als Formel für die gesuchte Größe. Da den neu eingeführten Konstanten die Werte[1])

$$N_\infty = 109737{,}11$$
$$c_2 = 1{,}4304$$

zukommen, rechnet man nach Formel (39)

$$\Theta = 561{,}5. \qquad (39')$$

Diesen Wert hat man der von Ehrenfest rund mit 570 angenommenen Konstanten der Theorie gemäß zu erteilen. Es ist zu erwarten, daß bei den höheren Rotationsgeschwindigkeiten der Wasserstoffatome eine Deformation des Bohrschen Modells auftreten muß, welche eine Vermehrung des Trägheitsmoments zur Folge haben wird. Nur bei den tieferen Temperaturen wird man mit der Annahme eines konstanten Trägheitsmoments sein Auslangen finden können. Bei steigender Temperatur hat man Abweichungen der entwickelten Formel zu erwarten, wie sie auch tatsächlich beobachtet werden. Eine strengere Behandlung des ganzen Problems ist von Epstein[2]) teilweise in Angriff genommen worden.

Zusammenfassung.

Alle bisherigen Ergebnisse der Quantentheorie in einheitlicher Weise mittels weniger, einfacher Grundvoraussetzungen zu entwickeln, war der Zweck der vorliegenden Zeilen. Wie in § 1 gezeigt wird, lassen sich die Grundformeln der Theorie der spezifischen Wärme aus der Vorstellung entwickeln, daß die Elemente jedes Körpersystems nur eine diskrete Zahl von Zuständen annehmen können, die untereinander gleich wahrscheinlich sind. In § 2 werden einfache Gesetzmäßigkeiten für den Energieaustausch entwickelt, auf Grund deren zwei Körper bei gleicher Temperatur sich in ihrem Gleichgewichte nicht stören. Im speziellen behandelt § 3 den Energieinhalt des einfach periodischen, geradlinigen Oszillators und zieht einen wichtigen Schluß über die Aufnahme und Abgabe der Energie in diesem besonderen Falle. Es folgt in § 4 die Entwicklung der Theorie der spezifischen Wärme fester Substanzen, wobei die Bestimmung der Eigenschwingungen auf eine besonders einfache und anschauliche Weise durchgeführt wird. In § 5 wird dargelegt, wie die Betrachtung des Äthers (Vakuums) als Kon-

1) Im Original hat sich außerdem ein Druckfehler in die Zehnerpotenz eingeschlichen. Weyssenhoff, Ann. d. Phys. (4) 51, 309, 1916.
2) Münchner Ber. 1, 1915.
3) Bohr, Phil. Mag. (6) 26, 863, 1913.
4) Flamm, l. c.
5) Flamm, l. c.

1) Flamm, l. c.
2) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 18, 398, 1916.

tinuum mit idealen, einfach periodischen Eigenschwingungen alle Gesetze der Strahlung ohne weiteres ergibt; es folgt die Energieverteilung der Hohlraumstrahlung und die Bohrsche Frequenzbedingung mit einem Schlage und außerdem eröffnet diese Betrachtungsweise Ausblicke, die vielleicht weitere Erfolge versprechen. Der § 6 endlich befaßt sich mit dem Teil der spezifischen Wärme des Wasserstoffs, welche von der rotatorischen Energie der Moleküle herrührt und dessen Temperaturabhängigkeit sich ohne weiteres aus den Grundformeln ergibt.

Wien, Physikalisches Laboratorium der k. k. Technischen Hochschule.

(Eingegangen 8. Januar 1918.)

BESPRECHUNGEN.

V. Kohlschütter, Die Erscheinungsformen der Materie. Vorlesungen über Kolloidchemie. gr. 8°. 355 S. mit 4 Abbildungen. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. M. 7.—, geb. M. 8.—

Der Titel ist in der vorliegenden Fassung nicht gerade glücklich gewählt, da die Kolloidchemie hier den Erscheinungsformen der Materie gewissermaßen gleichgesetzt ist. Auch ist das Eingehen auf die Theorien der allgemeinen physikalischen Chemie trotz der vom Verf. im Vorwort angeführten und sehr berechtigten didaktischen Gründe viel zu weitschweifig, zumal das Buch, wenn auch allgemeinverständlich, doch für Angehörige verwandter Fachgruppen bestimmt sein soll. Im übrigen ist das Buch in gewisser Beziehung eine Bereicherung der kolloidchemischen Literatur, wenn es auch nichts wesentlich Neues bietet: Die bereits vorhandenen „Lehrbücher" der Kolloidchemie bevorzugen mehr oder minder die Spezialgebiete des betreffenden Verfassers; Kohlschütters Darstellung dagegen — ein Lehrbuch ist es aber nicht und soll es auch nicht sein — betont besonders die ganz allgemeinen physikalisch-chemischen Grundlagen der Kolloidchemie. Recht geschickt sind einige Beispiele aus der angewandten Kolloidchemie verwertet. Daß Verf. die Einteilung der Kolloide in Suspensions- und Emulsionskolloide nach Höber — Wo. Ostwald statt z. B. der von Perrin in lyophobe und lyophile Kolloide (bei diesen wird von dem oft überhaupt nicht festzustellenden Aggregatzustand der dispersen Phase ganz abgesehen) übernimmt, ist nicht recht verständlich, zumal er selbst ihre Unzulänglichkeit betont, auf die Zsigmondy mehrfach eingehend mit Recht hingewiesen hat. Die spezielle Kolloidchemie wird in dem Buche überhaupt nicht behandelt. R. Franz.

Felix Auerbach, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Einführung in die Physik. (Aus Natur und Geisteswelt, Band 40.) 4. Aufl. 146 S. mit 71 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. Geh. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Dieses kleine Buch kann man mit bestem Gewissen allen denen empfehlen, die neben ihrem „Interesse" für Physik Fähigkeit und Willen haben beim Lesen etwas nachzudenken. Verf. versteht es meisterhaft, unter Vermeidung ermüdender definierender Einleitungen sofort das Wesen der Sache dem Leser klar und packend nahe zu bringen. Die Auswahl des Stoffes ist originell und auch dem Physiker wird die Lektüre Vergnügen bereiten. H. Hörig.

Walther Deutsch, Metallphysik. Lex. 8°. VIII u. 76 S. mit 20 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1916. Geb. M. 3.—

Die Schrift bezweckt, hauptsächlich Metalltechnikern einen Überblick über die physikalischen Eigenschaften der Metalle zu geben — in dieser Hinsicht mag sie einem zweifellos vorhandenen Bedürfnisse in gewissem Grade entsprechen. Bei dem Physiker dürfte die Arbeit wenig Anklang finden. H. Hörig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Erich Tiede und Dr. Karl W. Rosenmund für Chemie, an der Technischen Hochschule Zürich Schulrat Dr. Leopold Ruzicka für organische Chemie, speziell für Chemie der isozyklischen und heterozyklischen Verbindungen, sowie für die Theorien und Methoden der organischen Chemie.

Ernannt: Fräulein Dr. med. Lina Stern zum Professor für physiologische Chemie an der Universität Genf, der Observator am Geodätischen Institut bei Potsdam Dr. Gustav Förster zum Professor.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen Geheimer Hofrat Dr. Max Noether.

Gestorben: Der ord. Professor der organischen und technischen Chemie an der Universität Bukarest Dr. Constantin I. Istrati, der ord. Professor für Gärungschemie und Photographie an der Böhmischen Technischen Hochschule in Prag Hofrat Dr. Karl Kruis, der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Rom Dr. Pietro Blaserna Senatore del regno, der frühere Privatdozent der Chemie an der Universität München Professor Dr. Otto Freiherr v. d. Pfordten in Straßburg.

Gesuche.

Physikerin

in Berlin promoviert, sucht wissenschaftliche Betätigung auf physikalischem oder physikalisch-chemischem Gebiet. Berlin bevorzugt. Angebote unter **S. H. 514** an die Physikalische Zeitschrift, Leipzig, Königstraße 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Rich. Abeggs
Handbuch der anorganischen Chemie
in vier Bänden

herausgegeben von

Dr. Fr. Auerbach

Kaiserlicher Regierungsrat, Mitglied des Kaiserlichen Gesundheitsamtes.

Bisher erschienen:

Zweiter Band, erste Abteilung. Die Elemente der ersten Gruppe des periodischen Systems. Wasserstoff, Lithium, Natrium, Kalium, Rubidium, Cäsium, Kupfer, Silber, Gold. Mit 34 Figuren. — Preis geheftet 24 M., gebunden 27 M.

Zweiter Band, zweite Abteilung. Die Elemente der zweiten Gruppe des periodischen Systems. Beryllium, Magnesium, Calcium, Mörtel, Strontium, Barium, Radium, Zink, Cadmium, Quecksilber. Mit 16 Figuren. — Preis geheftet 22 M., gebunden 25 M.

Dritter Band, erste Abteilung. Die Elemente der dritten Gruppe des periodischen Systems. Bor, Aluminium, Tone, Ultramarin, Elemente der Cerit- und Ytteriterden (Seltene Erden), Cerium, Lanthan, Didym, Praseodym, Neodym, Samarium, Europium, Gadolinium, Terbium, Dysprosium, Holmium, Erbium, Thulium, Yttrium, Ytterbium, Scandium, Gallium, Indium, Thallium. Mit 7 Figuren. — Preis geheftet 15 M., gebunden 18 M.

Dritter Band, zweite Abteilung. Die Elemente der vierten Gruppe des periodischen Systems. Kohlenstoff, Silicium, Glas, Titan, Germanium, Zirkonium, Zinn, Blei, Thorium. Mit 64 Figuren. — Preis geheftet 25 M., gebunden 28 M.

Dritter Band, dritte Abteilung. Die Elemente der fünften Gruppe des periodischen Systems. Stickstoff, Ammoniumsalze, Phosphor, Arsen, Antimon, Wismut, Vanadium, Niob, Tantal. Mit 23 Figuren. — Preis geheftet 24 M., gebunden 27 M.

Vierter Band, zweite Abteilung. Die Elemente der siebenten Gruppe des periodischen Systems. Fluor, Chlor, Brom, Jod, Mangan. Mit 36 Figuren. Preis geh. 26 M., geb. 29 M.

Alle Preise sind exkl. 25 % Teuerungszuschlag.

In Vorbereitung:

Vierter Band, erste Abteilung. Die Elemente der sechsten Gruppe des periodischen Systems. Sauerstoff, Schwefel, Selen, Tellur, Chrom, Molybdän, Wolfram, Uran.

Vierter Band, dritte Abteilung. Die Elemente der achten Gruppe des periodischen Systems. Helium, Neon, Argon, Kryton, Xenon, Eisen, Kobalt, Nickel, Ruthenium, Rhodium, Palladium, Osmium, Iridium, Platin.

Probelieferungen liefert die Verlagsbuchhandlung kostenlos.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)

	Seite
Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip, v. A. Smekal	137
Boltzmannsches Prinzip: Adiabatenhypothese und —, v. A. Smekal	137
Dichteschwankungen: Die linearen Dimensionen der —, v. L. S. Ornstein u. F. Zernike	134
Einstein, A., Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. (B.)	152
Farbenlehre: Goethes —, im Urteile der Zeit, v. A. Sommerfeld. (B.)	151
Fixsterne: Über das System der —, v. K. Schwarzschild. (B.)	152
Goethes Farbenlehre im Urteile der Zeit, v. A. Sommerfeld. (B.)	151
Holonome Koordinaten: Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nicht-—, v. Cl. Schaefer	129
Koordinaten: Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome —, v. Cl. Schaefer	129
Lagrangesche Gleichungen: Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten — für nichtholonome Koordinaten, v. Cl. Schaefer	129
Meßwandler: Wirkungsweise der Motorzähler und —, v. J. A. Möllinger. (B.)	152
Möllinger, J. A., Wirkungsweise der Motorzähler und Meßwandler. (B.)	152
Motorzähler: Wirkungsweise der — und Meßwandler, v. J. A. Möllinger. (B.)	152
Ornstein, L. S. u. F. Zernike, Die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen	134
Relativitätstheorie: Über die spezielle und die allgemeine —, v. A. Einstein. (B.)	152
Schaefer, Cl., Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten	129
Schwarzschild, K., Über das System der Fixsterne. (B.)	152
Schraum: Über den —, v. H. Witte	142
Smekal, A., Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip	137
Sommerfeld, A., Goethes Farbenlehre im Urteile der Zeit. (B.)	151
Witte, H., Über den Schraum	142
Zernike, F. u. L. S. Ornstein, Die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen	134

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig.

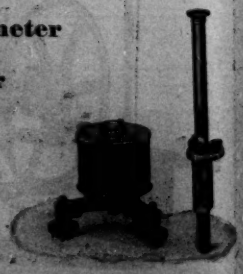
Allgemeine Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaft.

Eine Einführung in die moderne Naturphilosophie von **Dr. Bernhard Bavink.** Mit 19 Figuren und 2 Tafeln. **Preis geh. 6 M., geb. M. 9.**— exkl. Teuerungszuschlag.

Siemens & Halske A.-G.

Wernerwerk — Siemensstadt bei Berlin

Spiegelgalvanometer

Kleines Spiegelgalvanometer von besonders kurzer Schwingungsdauer

Ganze Höhe 220 mm